

**Lycée secondaire :
Ibn Khaldoun**

Devoir de synthèse N°2

Epreuve :

Mathématiques

Durée : 3 H

Classe: 4^{ième} Inf

A/S :2012 - 2013

**Proposé par :
Arfaoui khaled**

Exercice 1 : (3 points)

L'élève doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la bonne réponse

1°/ le nombre réel $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égale à :

a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) $-\frac{1}{2}$

2°/ la limite de la fonction $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x^2}$ à gauche en 0 est

a) 2

b) $+\infty$

c) $-\infty$

3°/ le nombre réel $e^{-2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}$ est égale à :

a) e

b) 1

c) - e

4°/ la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ est définie sur $]0, +\infty[$

a) vrai

b) faux

EXERCICE N°2 (4pts)

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1/ Calculer déterminant de A et en déduire que A est inversible

2/ a) Calculer A^2 puis $B = 4A - A^2$ et le produit A.B .

b) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A

3/ Résoudre Dans \mathbb{R}^3 le système S :
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE N°3 (5 pts)

On considère la suite définie sur \mathbb{N}^* par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1/ Calculer I_1 au moyen d'une intégration par parties

2/ a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $I_n \geq 0$

b) Montrer que I_n est décroissante et en déduire qu'elle est convergente

3/ a) En utilisant une intégration par parties , démontrer que pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

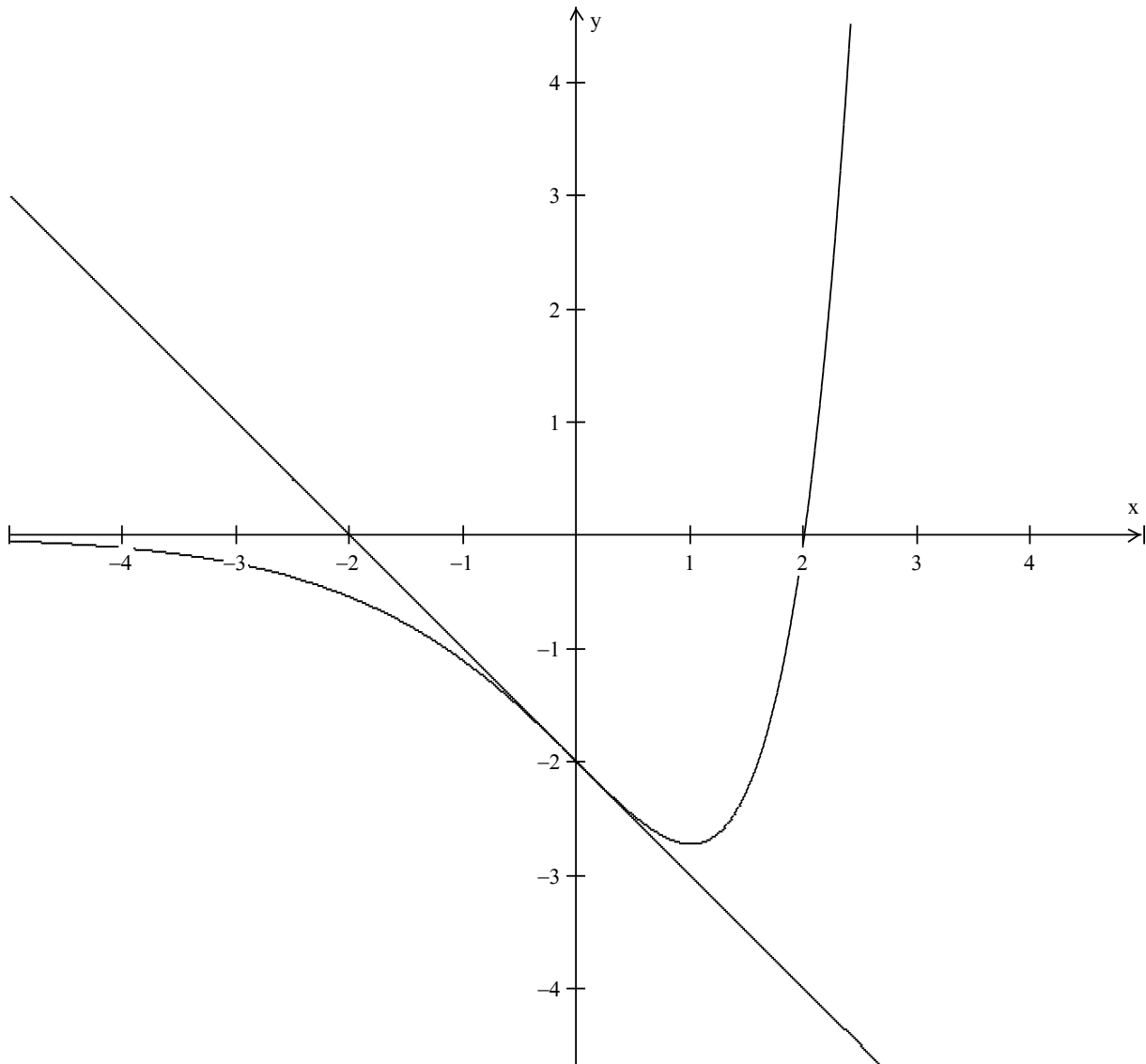
b) En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , on a : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

c) Déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

EXERCICE N°4 (8pts)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal , la courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur \mathbb{R} la tangente D à la courbe (C) au point A(0, -2) passe par le point B (2 , -4)



On désigne par f' la fonction dérivée de f

- 1) a) Donner la valeur de $f(0)$
b) Justifier que $f'(0) = -1$
- 2) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que , pour tout réel x , $f(x) = (x + a) e^{bx}$
 - a) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = (bx + ab + 1) e^{bx}$
 - b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes de a et b

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-2)e^x$

1) Donner l'expression de f' ; En déduire le sens de variation de f

2) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) En intégrant par parties Calculer $\int_2^3 f(x) dx$

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=3$