http://www.matheleve.net/
Email :matheleve@gmail.com

Lycée Ali Bourguiba Bembla

Devoir de Synthèse n°02

Durée 3 heures	*Mercredi 06 mars 2013*	*4 ème Inf*	***Mr : Chortani Atef***

Exercice 1(4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seul de trois réponse proposées et exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .Aucune justification n'est demandée.

1) L'équation (E) :11x+5y=21 admet dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

a)une infinité de solutions. b) une seul solution. c) zéro solution.

2) Pour tout entier non nul n ,PGCD(2n,2n+1) est égal à

a)1 b)2n c)2n+1

3)Soit n un entier naturel et $A=36^n-1$

Le reste de la division euclidienne de A par 7 est

a)0. b)1. c)2.

4)L'entier $9^{2013}+4$ est divisible par

a) 3. b)4. c) 5.

Exercice 2(5 points)

1)Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}17 & 14 & 16\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

a)Vérifier que A est inversible.

b)Calculer $A\times A'$ avec $A'=\begin{pmatrix}3 & -40 & -2\\ -2 & 36 & -1\\ -1 & 11 & 3\end{pmatrix}$

c)En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2)Soit le système (S) $\begin{cases}17x+14y+16z=138\\ x+y+z=9\\ 2x+y+4z=20\end{cases}$

a)Donner l'écriture matricielle de système (S) : $A\times X=B$ en précisant la matrice A et les matrices colonnes X et B.
b)Résoudre alors le système (S)

3)Le service informatique de gestion d'une entreprise occupe un grand bureau. Sa masse salaire est de 13800 DT par mois. Ce service utilise 9 ordinateurs pour la gestion totale.
On restructure ce service en trois bureaux b_1, b_2 et b_3 de x, y et z personnes respectivement.

*Chaque personne du bureau b_1 reçoit en moyenne 1700DT par mois, travaille avec un ordinateur et s’occupe de 10% de la gestion totale.

*Chaque personne du bureau b_2 reçoit en moyenne 1400DT par mois, travaille avec un ordinateur et s’occupe de 5% de la gestion totale.

*Chaque personne du bureau b_3 reçoit en moyenne 1600DT par mois, travaille avec un ordinateur et s’occupe de 20% de la gestion totale.

a)Traduire les données précédentes par un système de trois équations à trois inconnus x, y et z.
b)En déduire le nombre de personnes dans chaque bureau.

Exercice 3(6 points)

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			$g(0)$		

1) Calculer $g(0)$

2) En déduire le signe de g

II)On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1)Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2)a) Montrer pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^{2x}}$

b) Dresser le tableau des variations de *f*.

3)Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l’on précisera.

On note $\mathscr{C}$’ la courbe de la fonction réciproque de f

4) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à f au voisinage de $+\infty$.

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

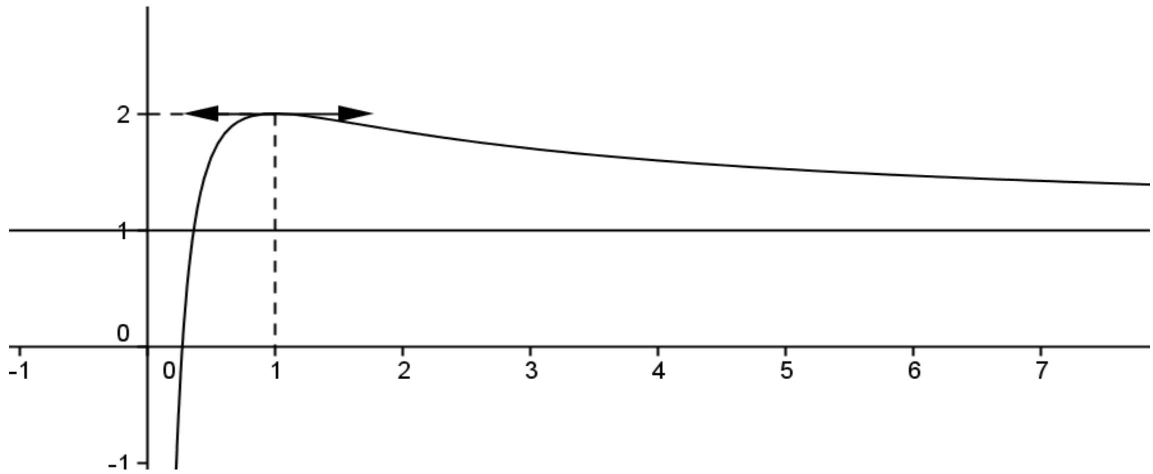
c)Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique que l’on précisera au voisinage de $-\infty$

5) Tracer D, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$’ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 4(6 points)

La courbe $\mathscr{C}$ ci dessous représente une fonction f définie sur $]0, +\infty[$; les droites d’équation

$x = 0$ et $y = 1$ étant des asymptotes a cette courbes



1)En utilisant le graphique , déterminer :

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b)Le tableau de variation de f.

2)On suppose que l'expression de $f(x)$ est de la forme: $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + b\frac{\ln x}{x}$ où a et b sont des nombres réels

a)Montrer que pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-a}{x^2} + b\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$

b) Calculer $f(1)$ et $f'(1)$ en fonction de a et b

En déduire que les réels a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a + 1 = 2 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

c) Déterminer alors l'expression de $f(x)$

II)Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^{-x})$

1)Montrer que pour tout réel x on a : $g(x) = (1 - x)e^x + 1$

2)a)Montrer que $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1$ et calculer $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

b)Montrer que pour tout réel x on a : $g'(x) = -xe^x$ puis dresser le tableau de variation de g

c)calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et intérpreter graphiquement le resultat

d)Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que 1<α<1.5