

Exercice n°1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte. Relever cette réponse.

1) Une primitive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction : $x \mapsto -\tan(x)$ est la fonction :

a) $-\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

b) $-\ln(\sin x)$

c) $-\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$. Alors :

a) $nI_n = \frac{1}{(n+1)} - I_{n+1}$

b) $I_n = \frac{1}{(n+1)} - nI_{n+1}$

c) $nI_n = -\frac{1}{(n+1)} + I_{n+1}$

3) Une primitive de la fonction $f: x \mapsto (x^2 + 2x)e^x$ sur \mathbb{R} est :

a) $(2x + 2)e^x$

b) $x^2 e^x$

c) $x^2 e^x + x$

4) La fonction f définie par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ a pour limite :

a) 0 en $+\infty$

b) 1 en 0^+

c) 0 en 0^+

Exercice n°2 : (6 points)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1+U_n^2}{2U_n}$.

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Etudier la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$ et $W_n = \ln\left(1 - \frac{2}{U_n + 1}\right)$.

a) Montrer que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que $U_n = \frac{1+e^{W_n}}{1-e^{W_n}}$ puis retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

b) Exprimer en fonction de n le produit $P_n = V_0 \cdot V_1 \cdot \dots \cdot V_n$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice n°3 : (3 points)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que M est inversible. Déterminer sa matrice inverse M^{-1} .

2) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système (S) : $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$ par :

a) Un calcul matriciel faisant intervenir M^{-1} .

b) La méthode des déterminants.

Exercice n°4 : (7 points)

1) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations de g .

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0, +\infty[$ une unique solution α .

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α . Déterminer le signe de $g(x)$.

c) Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Soit h la fonction définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $h(x) = \frac{4x}{e^x+1}$.

a) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $h'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b) Déduire les variations de la fonction h sur $[0, +\infty[$.

3) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x+1}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Étudier f et tracer C_f .

b) Soit $M(x, f(x))$, $P(x, 0)$ et $Q(0, f(x))$. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α . Le point M a pour abscisse α . La tangente (T) en M à la courbe (C_f) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$

Bonne chance et excellente réussite au Baccalauréat