

Date : mai 2015

Devoir de synthèse N°3

Niveau: 4<sup>ème</sup> sc.info

Nombre de pages : 3

BAC BLANC

Durée : 3h

**MATHEMATIQUES****EXERCICE N° 1 ( 3 pts)**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse (Une réponse non justifiée n'est pas considérée).

- Si  $M$  est une matrice carrée d'ordre 3 tel que  $M^2 - 3M + I_3 = O$  où  $O$  est la matrice nulle, Alors  $M^{-1} = M - 3I_3$ .
- La limite de  $\frac{\ln(x^2 + 1) - \ln 2}{x - 1}$  quand  $x$  tend vers 1 est égale à 2.
- Soit  $X$  une variable aléatoire donnant le gain algébrique dans un jeu et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Gain $x_i$	-2	0	1	2
$p_i = p(X = x_i)$	0,4	0,1	0,3	

Alors ce jeu est favorable ( gagnant).

- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements tels que  $p(A) = 0,8$  ;  $p(B) = 0,5$  et  $p(A \cup B) = 0,9$ , alors  $A$  et  $B$  sont des événements indépendants.

**EXERCICE N° 2 (3 pts)**

On considère dans  $Z^2$  l'équation (E) :  $8x + 5y = 95$ .

- Justifier pourquoi (E) admet des solutions dans  $Z^2$ .
- a) Vérifier que le couple (0 ;19) est une solution de (E).  
b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
- Pour encourager leur fils à bien réviser son bac, les parents d'un élève lui ont acheté un certain nombre de livres de deux types : des livres scientifiques et d'autres littéraires. Un livre scientifique vaut 16 dinars, alors qu'un livre littéraire vaut 10 dinars. Le prix total des livres est 190 dinars.  
Déterminer le nombre de livres de chaque type sachant que le nombre total de livres ne dépasse pas 15.

### EXERCICE N° 3 (4 pts)

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  où  $\alpha$  est un réel.

1) Déterminer les réels  $\alpha$  pour lesquels la matrice  $M$  est inversible.

2) Dans la suite on prend  $\alpha = 2$  et on considère la matrice  $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer la matrice  $M.N$ .

b) En déduire la matrice  $M^{-1}$  l'inverse de  $M$ .

3) lors d'une excursion organisée, un bus emporte 70 voyageurs dont : des hommes mariés chacun accompagné de sa femme, 5 hommes célibataires non accompagnés et des enfants. Pour les frais de transport chaque homme paye 20 dinars, chaque femme paye 20 dinars et chaque enfant paye 10 dinars. Le montant total payé est 1250 dinars. On appelle  $x$  le nombre d'hommes (mariés ou non),  $y$  le nombre de femmes et  $z$  celui des enfants.

a) Montrer que  $x$ ,  $y$  et  $z$  vérifient le système (S) : 
$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ 2x + 2y + z = 125 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

b) En utilisant la matrice  $M^{-1}$ , déterminer le nombre d'hommes, le nombre de femmes et celui des enfants.

### EXERCICE N° 4 (5 pts)

Un commerçant spécialisé en équipements informatiques propose en promotion un modèle d'ordinateur et un modèle d'imprimante.

Il a constaté, lors d'une précédente promotion, que :

- 20 % des clients achètent l'ordinateur.
- 70 % des clients qui achètent l'ordinateur en promotion achètent l'imprimante.
- 60 % des clients n'achètent ni l'ordinateur ni l'imprimante.

Un client entre dans le magasin. On suppose qu'il ne peut pas acheter plus qu'un ordinateur ni plus qu'une imprimante.

Soient les deux événements :  $A$  «le client achète un ordinateur»

$B$  «le client achète une imprimante ».

1) a) A partir de l'énoncé, donner les probabilités  $p(A)$  et  $p(\overline{A} \cap \overline{B})$ .

b) Sachant qu'un client n'achète pas l'ordinateur, calculer la probabilité qu'il n'achète pas une imprimante .

2) Construire un arbre pondéré représentant la situation.

3) Montrer que la probabilité qu'un client achète une imprimante est 0,34.

4) Un client achète une imprimante. Déterminer la probabilité que ce client achète aussi un ordinateur.

5) Le commerçant fait un bénéfice de 60 dinars sur chaque ordinateur vendu et un bénéfice de 20 dinars sur chaque imprimante vendue.

a) Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le bénéfice en dinar par client. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de  $X$ . (Aucune justification n'est demandée)

Bénéfice $x_i$	0	20		80
$p_i = p(X = x_i)$	0,6		0,06	

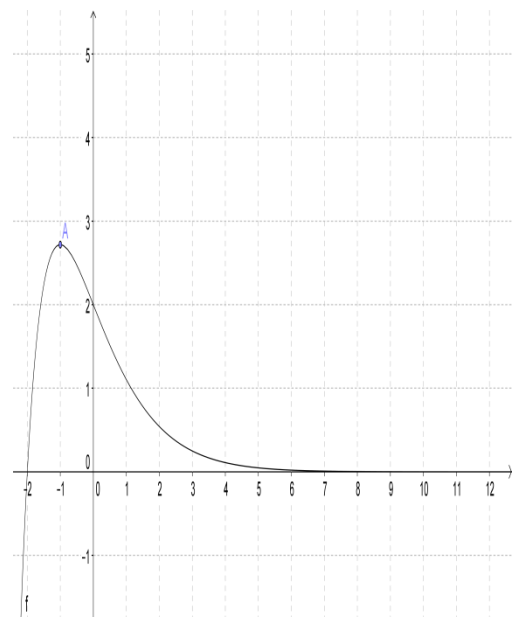
b) Pour 20 clients entrant dans son magasin, quel bénéfice le commerçant peut-il espérer tirer de sa promotion?

6) Trois clients entrent dans le magasin. On suppose que leurs comportements d'achat sont indépendants.

Déterminer la probabilité qu'au moins un de ces trois clients achète un ordinateur.

**EXERCICE N° 5 (5 pts)**

On donne ci-contre La courbe (C) d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (ax+b).e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels.



1) Par une lecture graphique :

a) Donner  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

b) Donner  $f(0)$  et  $f(-2)$ , en déduire les valeurs de  $a$  et  $b$ .

2) Dans la suite, on admet que  $a=1$  et  $b=2$ .

a) Vérifier que  $f'(x) = -(x+1).e^{-x}$ .

b) En déduire les coordonnées du point A représentant le maximum de  $f$ .

3) Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = -(x+3).e^{-x}.$$

a) Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Dresser le tableau des variations de  $F$ .

c) Montrer que la courbe de  $F$  admet un seul point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

4) Calculer, en unité d'aire, l'aire exacte  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites  $x = -2$  et  $x = 1$ , puis donner la valeur approchée de  $\mathcal{A}$  à  $10^{-2}$  près.