LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE **BACCALAUREAT BLANCHE** MAI - 2015	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 3 H Coefficient : 3
4^{Eme} SCIENCES INFORMATIQUES	**PROFESSEUR : SALAH HANNACHI**

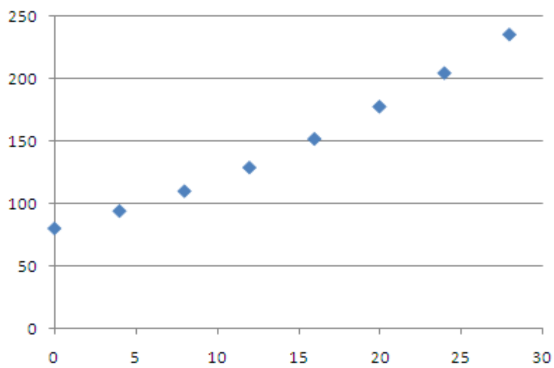
Le sujet comporte quatre exercices répartis en quatre pages

EXERCICE 1 : (4 points)

Dans une région de 1000 Km^2, la superficie des terrains urbanisés entre 1986 et 2014 est donné par le tableau suivant :

Année	1986	1990	1994	1998	2002	2006	2010	2014
Rang de l'année : X	0	4	8	12	16	20	24	28
Superficie en Km^2 : Y	80	94	110	129	152	178	205	236
$Z = \ln(Y)$	4,38	4,54	4,70	4,86	5,02	5,18	5,32	5,46

Le nuage de points associé à la série statistique (X , Y) est représenté ci-dessous :



■ Les estimations des superficies demandées dans l'exercice doivent être arrondies à l'unité.

A/ 1) Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (X, Y), arrondi à 10^{-2} prés.

2) Un ajustement affine de Y en X est-il possible ? Justifier.

3) Déterminer un ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer.

4) En déduire une estimation E_1 de la superficie des terrains urbanisés en 2018.

5) A partir de quelle année, la superficie des terrains urbanisés pourra dépasser 350Km^2 ?

B/ Le nuage de points associé à la série (X, Y) permet aussi d'envisager **un ajustement de type exponentiel.**

On pose Z=ln(Y). Les valeurs de Z sont données dans le tableau précédent arrondies à 10^{-2} prés.

1) Donner le coefficient de corrélation linéaire r' de la série statistique (X, Z) arrondi à 10^{-4} prés.

2) Déterminer un ajustement affine de Z en X par la méthode des moindres carrés.

3) En déduire une estimation E_2 de la superficie des terrains urbanisés en 2018.

EXERCICE 2 : (5 points)

A/ Un modèle de batteries fabriqué en très grande série, peut présenter deux sortes de défauts désignés par D_1 et D_2.Des statistiques ont montré que :

$*$ 6% de ces batteries ont le défaut D_1, dont 5% ont le défaut D_2.

$*$ Parmi les batteries n'ayant pas le défaut D_1, 7% ont le défaut D_2.

■ Un client achète au hasard une batterie.

On note : D_1 l'événement : «La batterie a le défaut D_1» et D_2 l'événement : «La batterie a le défaut D_2»

⇨ **Tout résultat demandé doit être arrondi à 10^{-3} prés.**

1) Calculer la probabilité que la batterie achetée présente les deux défauts.
2) Calculer la probabilité que la batterie achetée présente le défaut D_2.
3) Ce client achète une batterie ayant le défautD_2. Quelle est la probabilité que cette batterie ait le défautD_1 ?

B/ La durée de vie d'une batterie du modèle précédent, **(exprimée en mois)**, est une variable aléatoire X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1) La probabilité que cette batterie fonctionnait 5 mois est égale à 0,325. Déterminer λ.

⇨ Dans la suite de l'exercice on prend λ =0,225

2) Quelle est la probabilité que cette batterie fonctionnait une année ?
3) Quelle est la probabilité que cette batterie fonctionnait 5 mois et qu'elle pouvait tomber en panne pour la première fois au cours des 2 mois suivants ?
4) Cette batterie a déjà fonctionné 5 mois. Quelle est la probabilité qu'elle avait encore deux mois de plus de fonctionnement ?
5) On considère un lot de 10 batteries de ce modèle qui fonctionnent de façon indépendante.
   a) Déterminer la probabilité que dans ce lot il y ait au moins deux batteries fonctionnant 5 mois.
   b) Calculer la distribution moyenne des batteries fonctionnant 5 mois dans ce lot.

EXERCICE 3 : (4 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $10x - 3y = 5$

1) a) Vérifier que $(-1, -5)$ est une solution de l'équation (E).
   b) Montrer que les solutions de l'équation (E) sont tous les couples (3k−1,10k−5) tels que k∈ $\mathbb{Z}$.

2) Soit le couple(x, y) une solution de l'équation (E).
   a) Montrer que : $\begin{cases} x \equiv 2(mod 3) \\ y \equiv 5(mod 10) \end{cases}$
   b) En déduire que pour tout n∈IN, on a : $\begin{cases} x^{2n+1} \equiv 2(mod 3) \\ y^{2n+1} \equiv 5(mod 10) \end{cases}$
   c) Montrer alors que : $2x^{2n+1} - 3y^{2n+1} \equiv 1(mod 6)$

3) Montrer que l'entier N= $2\times 299^{2015} - 3 \times 995^{2015} - 1$ est divisible par 6.

EXERCICE 4 : (7 points)

I/ Soit la fonction $f : x \longmapsto ln(1-\sqrt{x})$; $x \in [0\,,1[$.

(C) étant sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O , I , J). (Voir l'annexe ci-joint).

1) a) En posant $t=1-\sqrt{x}$, montrer que $\frac{f(x)}{x} = \frac{lnt}{(1-t)^2}$. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) Interpréter cette limite géométriquement.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Montrer que $g(x) = (1-e^x)^2$ pour tout $x \in$K.

c) Tracer dans le repère (O , I , J) la courbe représentative (C') de la fonction g.

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe (O,I) et les droites d'équations : x=0 et $x=\frac{1}{4}$

a) Montrer que $\int_{-\ln 2}^{0} g(x)dx = \ln 2 - \frac{5}{8}$

b) En déduire que $\mathcal{A} = \left(\frac{5}{8} - \frac{3\ln 2}{4}\right)(u.a)$

II/ Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par : $h(x) = \ln\left(e^{2x}.\,g(x)\right)$. On désigne par (Γ) la courbe représentative de la fonction h dans le même repère (O , I , J).

1) a) Montrer que pour tout réel $x< 0$, ona : $h(x) = 2x + 2.\ln(1-e^x)$.

b) En déduire que la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote oblique à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.

c) Montrer que pour tout réel $x< 0$, la courbe (Γ) est située au dessous de la droite Δ.

2) a) Montrer que : $h'(x) = \frac{2-4e^x}{1-e^x}$ pour tout réel $x< 0$.

b) Vérifier que $h\left(\ln(\frac{1}{2})\right) = 4.\ln(\frac{1}{2})$, puis établir le tableau de variation de la fonction h.

3) Tracer la droite Δ et la courbe (Γ). (On prend : $\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cong -0{,}7$)

(Feuille à rendre)

Nom et prénom :………………………………………………………. Classe :…………………

(Annexe)