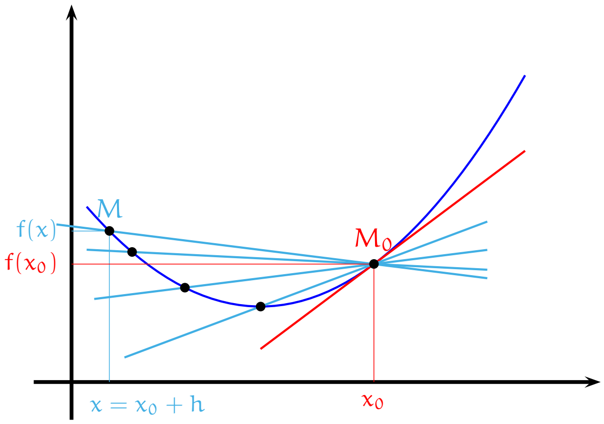
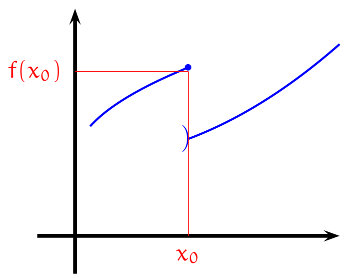
Dérivation

Nombre dérivé. Tangente



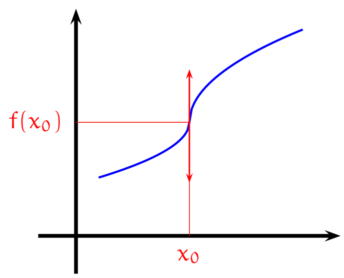
- $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. Pour $x \neq x_0$, le coefficient directeur de la droite (M_0M) est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0.
  Il revient au même de dire que le taux $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite finie quand h tend vers 0.
- Dans ce cas, le nombre dérivé de f en x_0 est
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
- Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $M_0(x_0, f(x_0))$ est
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Trois situations où la fonction f n'est pas dérivable en x_0



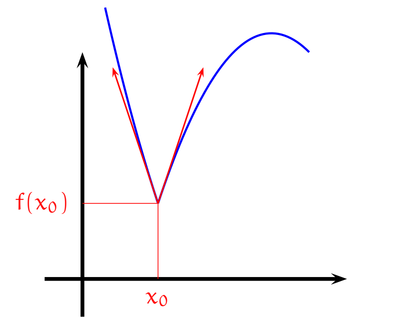
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

f n'est pas continue en x_0.



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty.$$

$\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à (Oy).



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$\mathscr{C}_f$ admet deux demi-tangentes de directions différentes.

Fonctions dérivables sur un intervalle. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en chaque réel x de I La fonction dérivée de f, notée f', est alors la fonction qui à chaque réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de la fonction f en x.

Lien avec la continuité

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Si f est continue en a, f n'est pas obligatoirement dérivable en a.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0. La fonction racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0. On a ainsi deux exemples de fonctions continues et non dérivables en un point.

On ne peut pas dire « f est dérivable et continue sur I » et encore moins « f est continue et donc dérivable sur I ».

Dérivées et sens de variation

Soit f une fonction **dérivable** sur un **intervalle** I.

- Si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$), f est croissante sur I (respectivement décroissante sur I).
- Si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sauf peut-être en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I).

Dérivées et extrema des fonctions

Soient f une fonction **dérivable** sur un **intervalle ouvert** I et x_0 un réel de I.

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, $f(x_0)$ et un extremum local de f.