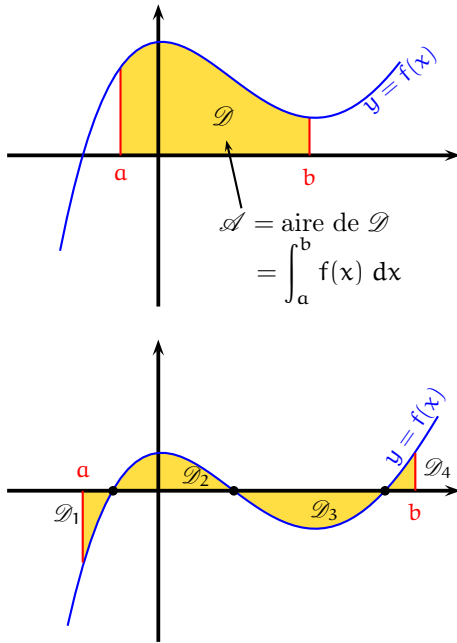


## Définition de l'intégrale

Un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  étant fixé, l'unité d'aire est l'aire du carré OIKJ où  $I(1,0)$ ,  $K(1,1)$  et  $J(0,1)$  (l'aire du carré OIKJ vaut 1 par définition).



$f$  est une fonction continue et **positive** sur un intervalle  $[a, b]$ .

$\mathcal{D}$  est le domaine du plan délimité par les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ , l'axe des abscisses et la courbe représentative de  $f$ .

L'**intégrale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$**  est l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $\mathcal{D}$  exprimée en unités d'aire.

Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$  car il est obtenu en sommant les aires des rectangles de longueur  $f(x)$  et de largeur infinitésimale  $dx$  quand  $x$  varie de  $a$  à  $b$ .

Si  $f$  n'est pas de signe constant sur  $[a, b]$ , l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est la différence de la somme des aires des domaines situés au-dessus de  $(Ox)$  et de la somme des aires des domaines situés au-dessous de  $(Ox)$ .

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4.$$

## Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ). La **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$  est  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

## Propriétés de l'intégrale

### • Linéarité de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a, b]$ . Alors  $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et  $\lambda$  un réel. Alors  $\int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ .

### • Positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Si  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $I$  tels que  $a \leq b$  et si pour tout réel  $x$  de  $[a, b]$  on a  $f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ . Si  $a$  et  $b$  sont deux réels de  $I$  tels que  $a \leq b$  et si pour tout réel  $x$  de  $[a, b]$  on a  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

### • Inégalité de la moyenne

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ). Si  $m$  et  $M$  sont deux réels tels que pour tous réels  $x$  de  $[a, b]$ , on ait  $m \leq f(x) \leq M$ , alors  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ .

### • Relation de CHASLES

Convention : On pose  $\int_a^a f(x) dx = 0$  et  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Pour tous réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $I$ , on a  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .