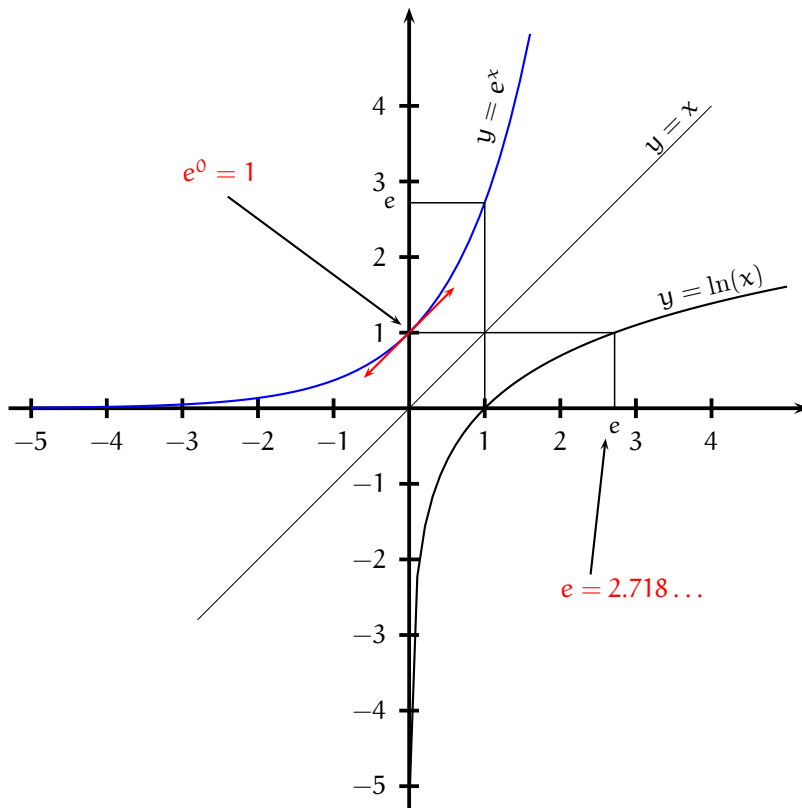


La fonction exponentielle

Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x, f'(x) = f(x).$$



Propriétés analytiques

- La fonction exponentielle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et

$$\text{Pour tout réel } x, (\exp)'(x) = \exp(x).$$

- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

- Pour tout réel x , $e^x > 0$.

- Limites aux bornes du domaine :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

- Théorèmes de croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

pour tout entier naturel non nul n ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

- Nombre dérivé en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y , $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Pour tout réel x , $e^x \neq 0$ et $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Pour tous réels x et y , $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.

Pour tout réel x et tout entier relatif n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

Pour tous réels x et y , $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

Pour tout réel x , $e^x \neq 0$ et $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Pour tous réels x et y , $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Pour tout réel x et tout entier relatif n , $e^{nx} = (e^x)^n$.

Liens avec le logarithme népérien

$$\text{Pour tout réel } x, \ln(e^x) = x. \quad \text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } e^{\ln(x)} = x.$$

Résolution d'équations et d'inéquations

Si $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a une solution et une seule. Si $a \leq 0$, l'équation $e^x = a$ n'a pas de solution.

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y). \quad \text{Pour tout réel } x \text{ et tout réel strictement positif } a, e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a).$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} . Donc

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, (e^x < e^y \Leftrightarrow x < y). \quad \text{Pour tout réel } x \text{ et tout réel strictement positif } a, e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a).$$