|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **[Mathématiques aux élèves](http://www.matheleve.com/)**  www.devoir.tn | **Arithmétiques** | |
| Exercices | 4ème  inf |

***Exercice 1***

*n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que *n* et 2*n* + 1 sont premiers entre eux.

2. On pose  et  et on note  le PGCD de  et .

a. Calculer  et en déduire les valeurs possibles de .

b. Démontrer que  et  sont multiples de 5 si et seulement si (*n* − 2) est multiple de 5.

3. On considère les nombres *a* et *b* définis par : .

Montrer, après factorisation, que *a* et *b* sont des entiers naturels divisibles par (*n* − 1).

4. a. On note *d* le PGCD de *n*(*n* + 3) et de (2*n* + 1). Montrer que  divise *d*, puis que  .

b. En déduire le PGCD, , de *a* et *b* en fonction de *n*.

***Exercice 2***

Le nombre *n* est un entier naturel non nul. On pose *a*= 4*n*+ 3 et *b*= 5*n*+ 2. On note *d* le PGCD de *a* et *b*.

1. Donner la valeur de *d* dans les cas suivants : *n*=1, *n*=11, *n*=15.

2. Calculer 5*a –* 4*b* et en déduire les valeurs possibles de *d*.

3. a. Déterminer les entiers naturels *n* et *k* tels que 4*n*+ 3 = 7*k*.

b. Déterminer les entiers naturels *n* et *k’* tels que 5*n*+ 2 = 7*k’*.

4. Soit *r* le reste de la division euclidienne de *n* par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de *r* pour laquelle *d* vaut 7. Pour quelles valeurs de *r,* *d* est-il égal à 1 ?

***Exercice 3***

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*,  est divisible par *n* + 3.

b. Montrer que, pour tout entier naturel *n*,  est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls *a*, *b* et *c*, l’égalité suivante est vraie :

PGCD(*a* ; *b*) = PGCD(*bc −* *a* ; *b*).

3. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, supérieur ou égal à 2, l’égalité suivante est vraie :

PGCD(3*n*3 − 11*n* ; *n*+ 3) = PGCD(48 ; *n* + 3).

4. a. Déterminer l’ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l’ensemble des entiers naturels *n* tels que  soit un entier naturel.

***Exercice 4***

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 5, on considère les nombres  et .

1. Montrer, après factorisation, que *a* et *b* sont des entiers naturels divisibles par *n −*4.

2. On pose  et . On note *d* le PGCD de et .

a. Calculer −2

b. Démontrer que *d* est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres et sont multiples de 5 si et seulement si *n −*2 est multiple de 5.

3. Montrer que 2*n +*1 et *n* sont premiers entre eux.

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de *n* et en fonction de *n*, le PGCD de *a* et *b*.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers *n =* 11 et *n =* 12.

***Exercice 5***

1. On considère l’équation (E) : 8*x*+ 5*y* = 1, où (*x* ; *y*) est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l’équation (E).

b. Résoudre l’équation (E).

2. Soit *N* un nombre naturel tel qu’il existe un couple (*a* ; *b*) de nombres entiers vérifiant : .

a. Montrer que le couple (*a* ; *b*) est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de *N* par 40 ?

3. a. Résoudre l’équation 8*x* + 5*y* = 100, où (*x* ; *y*) est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIIIème siècle, un groupe composé d’hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d’hommes et de femmes dans le groupe ?