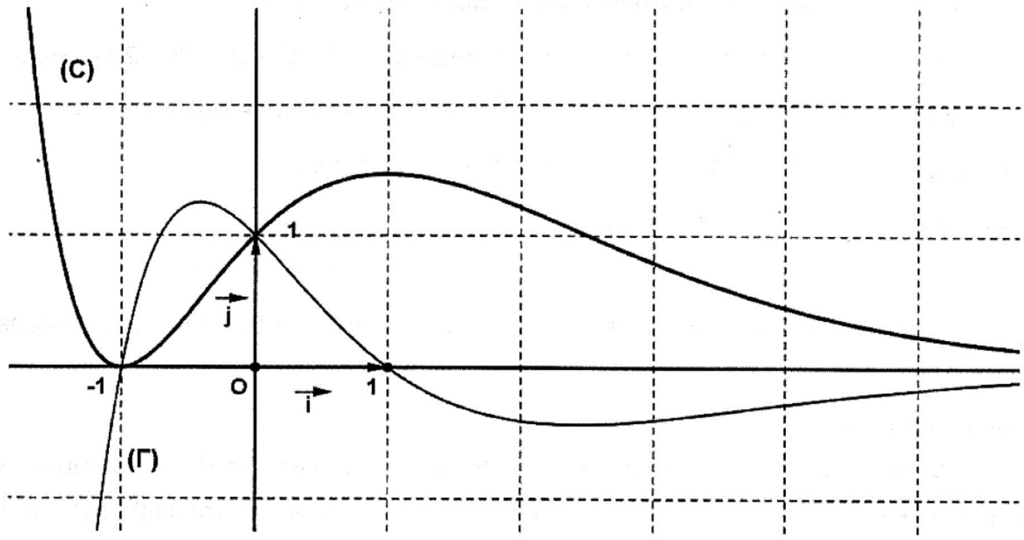
Exercice 1: 2010 pr

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.



1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f'.
2) Déterminer f(0), f' (0), f(-1) et f' (-1).
3) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)^2e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2e - 5$.

   b) Déterminer l'aire $\mathscr{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1 , +\infty[$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[1 , +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1 , +\infty[$ une solution unique α et que $1,41 < \alpha < 1,42$.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha(1-\alpha)}$, (g^{-1} désigne la fonction réciproque de g).

Exercice 2 : 2012 pr

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

C_f est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f(x) = -\frac{x^2 + x\ln x + x}{(x+1)^2} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Le réel α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses autre que le point O.

1) a/ Par lecture graphique, donner le signe de $f(x)$.

b/ Montrer que $\ln\alpha = -(\alpha+1)$.

2) On considère la fonction g définie sur $[\alpha,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1} + 1$

et on désigne par Cg la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0.$

3) a/ Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, $g'(x) = -\dfrac{f(x)}{x}.$

b/ Dresser le tableau de variation de g.

4) a/ Montrer que $g(\alpha) = 1-\alpha.$

b/ Construire alors, sur l'annexe, le point de la courbe Cg d'abscisse α .

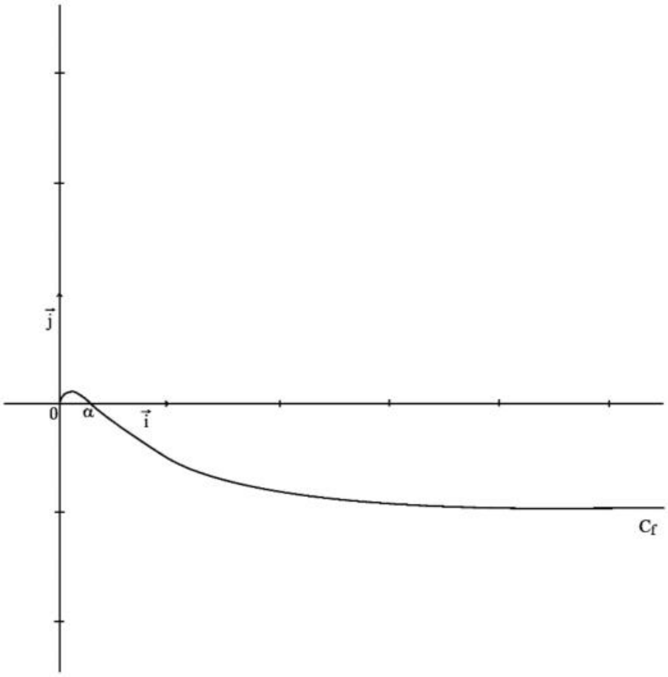
c/ Tracer la courbe Cg.

5) On désigne par **A** l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par les courbes Cg , C_f et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_\alpha^1 f(x)dx = -\left[xg(x)\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 g(x)dx.$$

b/ En déduire que **A** = $\alpha^2-\alpha+1.$



Exercice 3 : 2014 pr

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de C_f et (T).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{4}$		$-$	0	$+$	

c) Tracer (T) et C_f.

4) Soit λ un réel strictement positif. On désigne par A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Montrer que $A_\lambda=-e^{-\lambda}+\ln(1+e^{-\lambda})+1-\ln 2$.

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.

Exercice 4 : 2015 pr

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$.

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.

2/ a) Montrer que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Montrer que

(x^2-1) et $\ln x$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

d) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une unique tangente D parallèle à la droite Δ.

Préciser les coordonnées du point B, point de contact de $\mathscr{C}$ et D.

b) Donner une équation de D.

4/ Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé relativement au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

la droite Δ et la courbe (Γ) d'équation $y=\frac{\ln x}{x}$.

a) Soit le point $A(\frac{1}{e},0)$.

Placer le point A et vérifier que A appartient à D.

b) Tracer la droite D et placer le point B.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5/ Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites

d'équations $x=\frac{1}{e}$ et $x=e$.

Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 5 : 2016 p

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite Δ d'équation $y=-x$.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Calculer f(1). En déduire le signe de f(x) pour $x\in]0,+\infty[$.

d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3) a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

4) Soit $x>0$.

a) Vérifier que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En remarquant que $\sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$, montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_3.

2) a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \le 1 - \frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ et que $0,7 < \ell \le 1$.

Exercice 6 : 2017 p

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1+x^2)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point J d'abscisse 0.

b) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3.

Montrer que A et B sont deux points d'inflexion de (C).

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- (Γ) est la courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur IR par $g(x) = e^x$.
- E et F sont les points de (Γ) d'abscisses respectives (-1) et $\ln 10 - 3$.
- G est le point de coordonnées $(0\ ,\ 1-6e^{-3})$.

a) Exprimer $f(1)$ en fonction de $g(-1)$ et $f(3)$ en fonction de $g(-3)$.

b) En remarquant que $10\,g(-3) = g(\ln 10 - 3)$, placer les points A et B dans l'annexe.

5) a) Soit K le point de coordonnées $(\frac{11}{2}, 0)$.

Montrer que la droite (BK) est la tangente à la courbe (C) au point B.

b) Tracer la courbe (C) dans l'annexe (On placera les tangentes à (C) en A, en J et en B).

6) Soit S l'aire en (u.a) de la partie E du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x = 0$ et $x = 3$.

a) Hachurer E .

b) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur IR.

c) Calculer S.

d) Vérifier que la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0,3] est égale à $1 - 6e^{-3}$.

e) Tracer dans la **figure 2** un rectangle d'aire égale à S.

Exercice 7 : 2009 co

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = -1 + \frac{x-1}{x+1}e^x$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$.

b) Donner le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1, +\infty[$ une unique solution α et que $1,5 < \alpha < 1,6$.

b) Vérifier que $e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

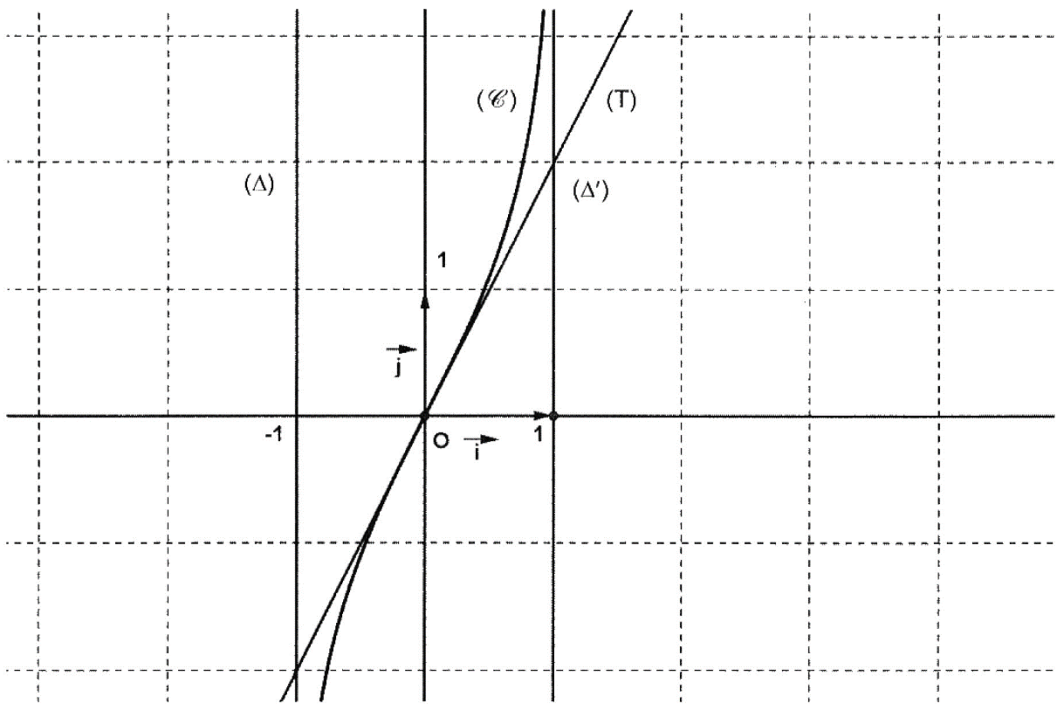
4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$

Exercice 8 : 2010 co

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur $]-1\,,\,1[$. Les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont les asymptotes à $(\mathscr{C})$. La droite (T) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

1) En utilisant le graphique déterminer f(0) et f '(0).
2) Soit g la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Déterminer g(0) et g'(0).
   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$.
3) Sachant que l'expression de g est de la forme $g(x) = \dfrac{e^x + a}{e^x + b}$, montrer en utilisant ce qui précède que $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4) a) Vérifier que $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) Calculer alors $\int_0^1 g(x)dx$.
5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.
   a) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - 2\int_0^1 g(x)dx$.
   b) En déduire $\mathscr{A}$.



Exercice 9 : 2011 co

I – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) En déduire que pour tout réel x, $e^x - x \geq 1$.

II – Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_g d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

La droite d'équation x = 0 est une asymptote à la courbe C_g.

La courbe C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

1) a) Déterminer g(1), g(2) et g(3).

b) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^{g(x)}$ et soit C_h sa courbe représentative .

a) Calculer h(1), h(2) et h(3).

b) Justifier que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$.

c) En écrivant $\frac{h(x)}{x} = \frac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{x}$, pour $x > 2$, montrer que la courbe C_h admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

3) Soit $\alpha > 0$.

On note M et N les points des courbes C_g et C_h d'abscisse α .

a) Calculer la distance MN en fonction de $g(\alpha)$.

b) Montrer que la distance MN est minimale lorsque $\alpha = 2$.

4) Tracer la courbe C_h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 10 : 2012 co

Dans l'annexe ci-jointe on a représenté , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x + x + 2}{e^x + 1}$.

1) Montrer que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ et tracer l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

2) a/ Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 - \frac{xe^x + e^x}{e^x + 1}$.

b/ En déduire que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote Δ qu'on précisera.

c/ Etudier la position relative de la courbe C_f et l'asymptote Δ puis tracer Δ.

3) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}$.

4) Soit α l'abscisse du point A de la courbe C_f où la tangente est horizontale.

a/ Vérifier que α est différent de 0.

b/ Montrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ puisque $f(\alpha)=\alpha+1$.

c/ Construire alors le point A et la tangente à la courbe C_f au point A.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.

a/ Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b/ Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 11 : 2014 co

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x.$$

On désigne par C_f et C_g les courbes de f et g dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.

b) Justifier que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) On donne, ci-contre, le tableau de variation de la fonction $g-f$.

x	0		1		$+\infty$
$g-f$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

a) Préciser la position relative des courbes C_f et C_g.

b) Soit a un réel de $]1,+\infty[$, M le point de la courbe C_f d'abscisse a et N le point de la courbe C_g de même abscisse a.

Justifier que $MN<1$.

4) Dans **l'annexe** ci-jointe, on a tracé la courbe C_g.

a) Tracer la courbe C_f.

b) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x)-f(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f, C_g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 12 : 2015 co

1/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x-\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de g.

b) En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $g(x)>0$.

2/ Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2x-(\ln x)^2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$..

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par C_f la courbe représentative de f et par Δ la droite d'équation $y=2x$.

a) Vérifier que Δ est la tangente à C_f en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ.

c) Étudier la position relative de C_f et Δ.

4/ a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe C_f.

c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la droite Δ, la courbe C_f et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A}=e-2$.

Exercice 13 : 2016 co

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2e^x$.

   a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

   b) Comparer x et $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants : $x\in]0,1[$ et $x\in]1,+\infty[$.

   c) En déduire que si $x\in]0,1[$ alors $g(x)<g(\frac{1}{x})$ et que si $x\in]1,+\infty[$ alors $g(x)>g(\frac{1}{x})$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

   a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x) = g(x)-g(\frac{1}{x})$.

   b) Calculer $f'(1)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe on a représenté, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C}_h)$ de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)= e^{\frac{1}{x}}$.

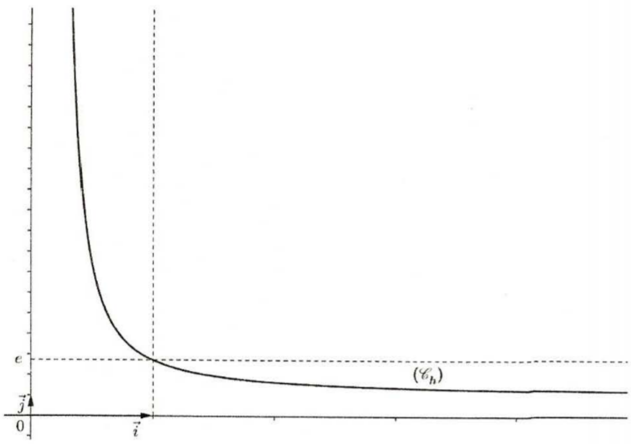
   a) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_h)$.

   b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$.

   b) Soit $\alpha\in]0,1]$.

   Exprimer en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\mathscr{A}_\alpha$.



Exercice 14 : 2017 co

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x\in\,]0,+\infty[$, $\ln(x+1)=\ln(x)+\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe (C) tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose $a_n=f^{-1}(\dfrac{1}{n})$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

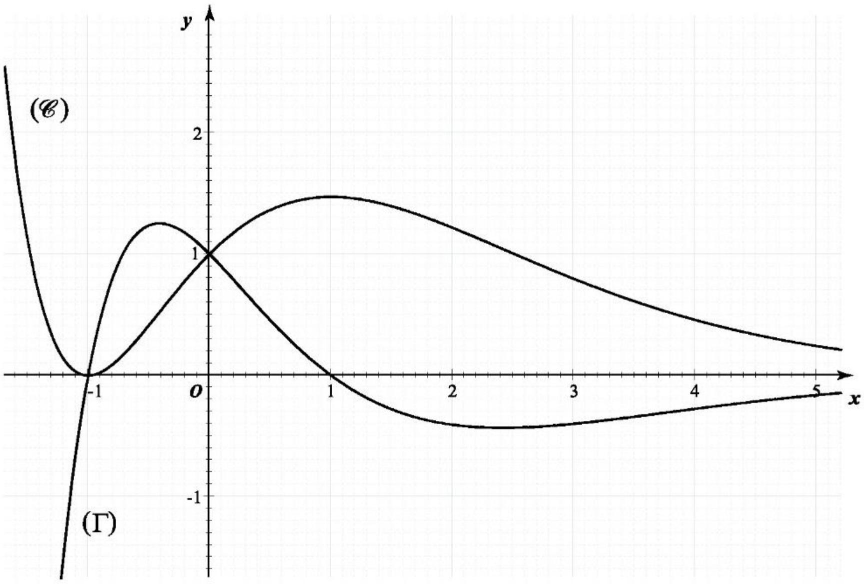
b) Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n=x+1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n$.

Correction

Corrigé d'exercice N°1 : 2010 pr

A°) 1°)



L'idée repose sur le principe suivant :

" Le signe de la fonction dérivée d'une fonction indique les variations de la fonction ".
On constate, graphiquement, que la courbe $(\mathscr{C})$ est celle d'une fonction positive sur IR .
Si jamais $(\mathscr{C})$ représentait la fonction dérivée f', la fonction f serait alors croissante sur $\mathbb{R}$.
L'allure de la courbe (Γ) ne correspondant pas à ce profil , (Γ) ne peut donc pas représenter la fonction f .
On retient alors que $(\mathscr{C})$: Courbe représentative de f.
(Γ) : Courbe représentative de f'.

A°) 2°) $f(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C})$
$f'(0)=1$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)
$f(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C})$
$f'(-1)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe (Γ)

A°) 3°) On a : $\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = f(0)-f(-1) = 1-0 = 1$ (ua)

B°) 1°) a°) L'intégrale se présente sous la forme : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}\,dx$ et l'énoncé nous invite à procéder à une double intégration par parties qu'il faudra effectuer convenablement :

<u>Première intégration par parties</u> : Notons $\begin{cases} u_1(x)=(x+1)^2 \\ v_1'(x)=e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_1'(x)=2(x+1) \\ v_1(x)=-e^{-x} \end{cases}$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-0}^{0}(x+1)^2e^{-x}\,dx = \left[-(x+1)^2e^{-x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -2(x+1)e^{-x}\,dx =$
$\left[-(x+1)^2e^{x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2(x+1)e^{x}\,dx$

Cette dernière intégrale nécessite, à son tour, une nouvelle intégration par parties

Deuxième intégration par parties : Notons $\begin{cases} u_2(x) = 2(x+1) \\ v_2'(x) = e^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} u_2'(x) = 2 \\ v_2(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\int_{-1}^{0} 2(x+1)e^{-x}\,dx = \left[-2(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x}\,dx = \left[-2(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[-2e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \left[-2(x+2)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$

On obtient : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[-(x+1)^2 e^{x}\right]_{-1}^{0} + \left[-2(x+2)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = \left[-(x^2+4x+5)e^{-x}\right]_{-1}^{0} = 2e-5$

B°) 1°) b°)

$\mathscr{A}' = \int_{-1}^{0} \left(f'(x) - f(x)\right)\,dx = \mathscr{A} - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1-(2e-5) = 6-2e \ \ (ua)$

B°) 2°) a°) La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a :

Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $g'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1-x^2)e^{-x}$.

On retient que : Pour tout $x \in]1,+\infty[$, $g'(x) < 0$ et que par conséquent :

g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

g réalise donc une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J = g([1,+\infty[)$

g étant continue sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $J = g([1,+\infty[)$ est l'intervalle $J = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) , g(1)\right]$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x} = 0$.

On a : $g(1) = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$.

En définitive : g réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J = \left]0, \frac{4}{e}\right]$.

Note : La stricte décroissance ainsi que la continuité de g sur $[1,+\infty[$ peuvent être justifiées graphiquement .

Note : La détermination de la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ peut être justifiée graphiquement : asymptote horizontale ….

Note : La détermination de la valeur <u>exacte</u> de $g(1) = \frac{4}{e}$ est exigée .

B°) 2°) b°) Dans $[1,+\infty[$, l'équation $g(x) = x$ est équivalente à : $g(x) - x = 0$ ou encore à l'équation $\varphi(x) = 0$, où φ désigne la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $\varphi : x \mapsto g(x) - x$.

Tout revient à montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$, possède , dans $[1,+\infty[$, une unique solution α vérifiant $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$.

La fonction φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$\varphi'(x) = g'(x) - 1 = (1-x^2)e^{-x} - 1$.

On retient que : Pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\varphi'(x) < 0$ et que par conséquent :

φ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

φ réalise donc une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $K = \varphi([1,+\infty[)$

φ étant continue sur $[1,+\infty[$, l'ensemble $K = \varphi([1,+\infty[)$ est l'intervalle $K = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) , \varphi(1)\right]$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 1 = -1$.

On a : $\varphi(1) = g(1) - 1 = \dfrac{4-e}{e}$.

En définitive : φ réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $K = \left]-1, \frac{4-e}{e}\right]$.

$0 \in \left]-1, \frac{4-e}{e}\right]$, l'équation $\varphi(x)=0$, possède, dans $[1,+\infty[$, une unique solution α.

La fonction φ est continue sur $[1,41\ ;\ 1,42]$ et vérifie $\varphi(1,41).\varphi(1,42)<0$.

On a alors, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, $1,41<\alpha<1,42$

$\boxed{\text{Note}}$: Concernant l'existence du réel α, un méthode alternative est acceptable (accorder 0.5) :
Justification graphique de la seule existence à l'aide de $\Delta: y=x$.

B°) 2°) c°) La fonction g réalise une bijection de l'intervalle $[1,+\infty[$ sur $J=\left]0,\frac{4}{e}\right]$

La fonction g possède donc une fonction réciproque g^{-1} définie de $J=\left]0,\frac{4}{e}\right]$ sur $[1,+\infty[$.

De l'égalité $g(\alpha)=\alpha$, on tire : $g^{-1}(\alpha)=\alpha$.

g étant :
- d'une part, dérivable sur $[1,+\infty[$ et en particulier en $\alpha=g^{-1}(\alpha)$
- d'autre part, vérifiant $g'(\alpha)=(1-\alpha)^2e^{-\alpha}\neq 0$

on en déduit que : La fonction g^{-1} est dérivable en α.

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(\alpha)\right)}=\frac{1}{g'(\alpha)}=\frac{1}{(1-\alpha)^2e^{-\alpha}}=\frac{e^{\alpha}}{1-\alpha^2}\quad \textbf{(1)}.$$

D'autre part, $g(\alpha)=\alpha \iff (\alpha+1)^2e^{-\alpha}=\alpha \iff e^{\alpha}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$.

En remplaçant cette dernière valeur de e^{α} dans la relation **(1)**, on obtient :

$$\left(g^{-1}\right)'(\alpha)=\frac{e^{\alpha}}{1-\alpha^2}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha(1-\alpha)^2}=\frac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Corrigé d'exercice N°2 : 2012 pr

1) a) Signe de f(x) :

x	0		α		$+\infty$
f(x)		+	0	−	

b) $f(\alpha)=0 \iff -\frac{\alpha^2+\alpha\ln(\alpha)+\alpha}{(\alpha+1)^2}=0 \iff \ln\alpha=-(\alpha+1)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}.\ln x+1\right)=+\infty$, $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}.\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=0$

3) a) $g'(x)=-\frac{f(x)}{x}$

b)

x	α		$+\infty$
g'(x)	0	+	
g(x)	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) a) $g(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} + 1 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = 1 - \alpha$

b) voir figure 2

c) voir figure 2

5) a) $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = \int_{\alpha}^{1} -xg(x)$

On pose $u(x) = -x \quad \rightarrow \quad u'(x) = -1$

$v'(x) = g'(x) \quad \rightarrow \quad v(x) = g(x)$

Alors $\int_{\alpha}^{1} f(x)dx = -[x.g(x)]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx$

b) $\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{1} |f(x) - g(x)| dx\ (u.a) = \int_{\alpha}^{1} g|(x) - f(x)| dx\ (u.a) = \int_{\alpha}^{1} g(x)dx - \int_{\alpha}^{1} f(x)dx\ (u.a)$

$= \int_{\alpha}^{1} g(x)dx - [-x.g(x)]_{\alpha}^{1} + \int_{\alpha}^{1} g(x)dx\ (u.a) = [x.g(x)]_{\alpha}^{1} = g(1) - \alpha g(\alpha)$

$\mathcal{A} = 1 - \alpha(1-\alpha) = \alpha^2 - \alpha + 1$

Corrigé d'exercice N°3 : 2014 pr

1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{x}} = 0.$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{x}} = +\infty.$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(1+e^{x})} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right)\frac{-1}{(1+e^{x})} = -\infty.$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{j})$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{x}) - e^{-x}e^{x}}{(1+e^{x})^2} = \frac{-e^{-x}-2}{(1+e^{x})^2} = -\frac{(2+e^{-x})}{(1+e^{x})^2}.$

b) Pour tout réel x, $f'(x) < 0.$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

3) a) $(T): y = f'(0)x + f(0) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$

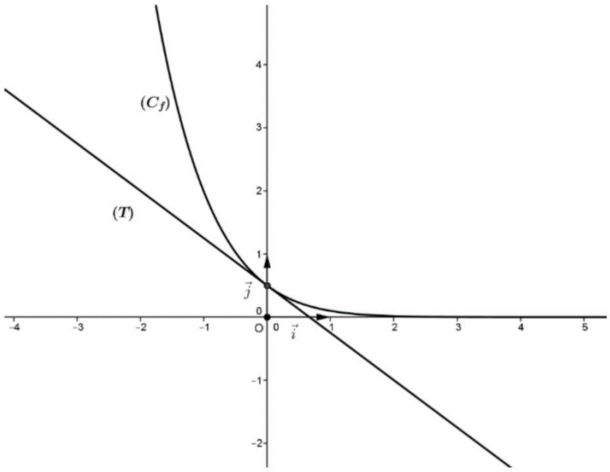
b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)+\frac{3}{4}$	$-$	0	$+$
$f(x)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction $x \mapsto f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ égal à 0 donc pour tout réel x,

$f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$. Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (T).

c)



4) a) Pour tout réel x, $e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}=f(x)$.

b) $A_\lambda=\int_0^\lambda f(x)dx=\int_0^\lambda\left(e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx=\left[-e^{-x}+\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^\lambda=\left(-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2\right)$ua.

c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2=1-\ln 2$.

Corrigé d'exercice N°4 : 2015 pr

1/ a) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln x}{x}=0$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ donc la droite $x=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=0$ donc la droite $y=x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f(x)-x=-\dfrac{\ln x}{x}$ le signe est celui de $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
Positions	$\mathscr{C}$ est au dessus de Δ		$\mathscr{C}$ est en dessous de Δ

2/ a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=1-\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
x^2-1	||	$-$	0	$+$	
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

c) Pour tout $x\in]0,1[$, $f'(x)<0$.

Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)>0$.

d) On a $f'(1)=0$ de plus pour tout $x\in]0,1[$, $f'(x)<0$ et pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)>0$.

Il en résulte que 1 est l'unique solution de l'équation $f'(x)=0$.

e)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

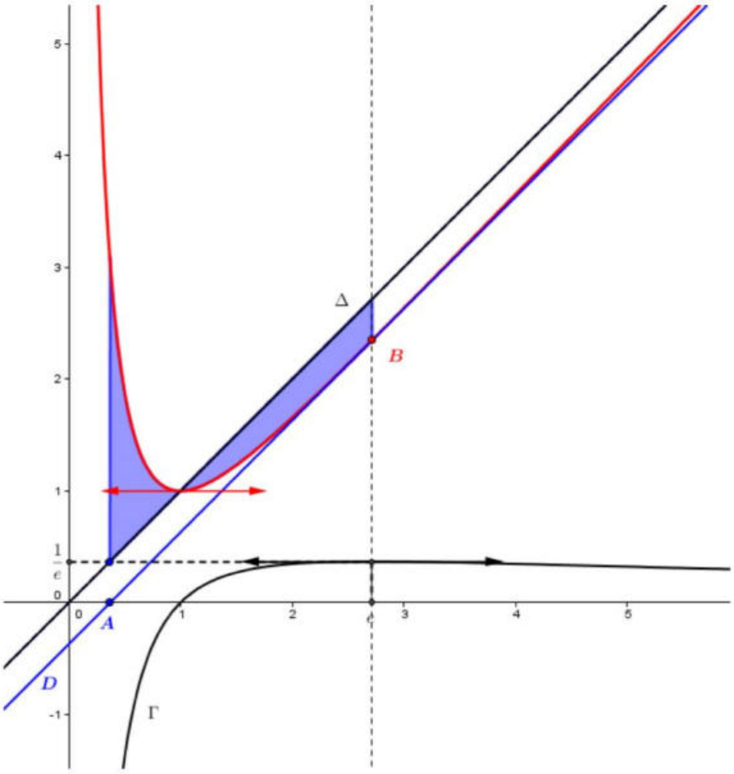
3/ a) $D\,□\,\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=1 \\ ]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=1 \\ ]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x=e.$ On en déduit qu'il existe une unique tangente D à $\mathscr{C}$ au point $B\left(e, e-\dfrac{1}{e}\right)$.

b) $D: y=f'(e)(x-e)+f(e)=x-\dfrac{1}{e}$.

4/ a) $D: y=x-\dfrac{1}{e}$. Pour $x=\dfrac{1}{e}$, $y=0$ donc $A\in D$.

b) $D\,□\,\Delta$ et passe par A.

c)



5/ $A=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|f(x)-x\right|dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{-\ln x}{x}dx+\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$

$=\left[-\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e}=1ua.$

Corrigé d'exercice N°5 : 2016 pr

A.

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(2x\ln x-x^2+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{2\ln x}{x}-1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}-1+\frac{1}{x^2}=-1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln x+\frac{1}{x}=+\infty$, il en résulte que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y=x$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)=-\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)^2=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2.$$

b) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[\,, f'(x)\geq 0$ de plus $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1.$

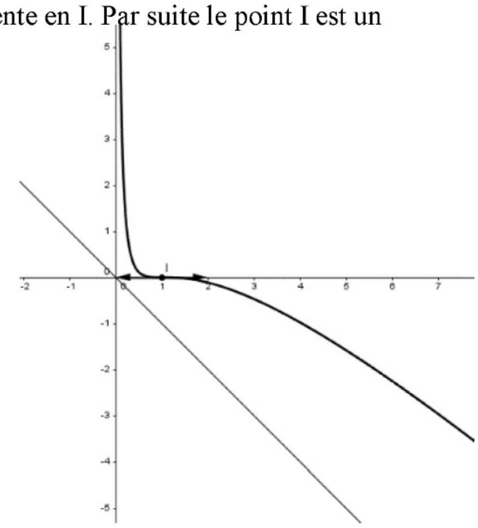
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$-$	
$f(x)$	||	$+\infty$	$\searrow$		$-\infty$

c) $f(1)=0.$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	

d) $f'(1)=0$ donc $\mathscr{C}$ admet au point $I(1,0)$ une tangente horizontale de plus la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en I. Par suite le point I est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3) a) Voir figure.



b) $A=\int_1^e |f(x)|dx=-\int_1^e f(x)dx=-\left[2(x\ln x-x)-\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e$

$$=\frac{e^2-7}{2}\text{ (ua).}$$

4) a) $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

b) Puisque pour tout $x>0, \sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$ et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\leq 0$ ou encore $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\leq 0\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$

B.

1) $u_3=\sum_{k=1}^{3}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln^2 2+\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)+\ln^2\left(\frac{4}{3}\right)=0,726.$

2) a) $u_{n+1}-u_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ car $(1+\frac{1}{n+1}>1)$ par suite la suite (u_n) est croissante.

b) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}..$

c) On a $\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ alors $\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$.

Il en résulte que $u_n \le 1-\frac{1}{n+1}$

d) On a $u_n \le 1-\frac{1}{n+1} < 1$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 alors la suite (u_n) est convergente vers un réel L.

Pour $n \ge 3$, $u_3 \le u_n \le 1-\frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1$ alors $0.7 < 0.726 \le L \le 1.$.

Corrigé d'exercice N°6 : 2017 pr

1) a) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty}(1+x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty\end{array}\right\}$ alors $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Donc $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{x}.e^{-x} = -\infty$.

(C) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.

c) $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}+x^2e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}+\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}+\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0+0=0$.

Donc l'axe des ordonnées est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}\times(1+x^2) = (2x-(1+x^2))e^{-x}$

$= (-x^2+2x-1)e^{-x} = -(x^2-2x+1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x}$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\le 0$ et $f'(1)=0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

3) **a)** $T_0 : y = f'(0)\,x + f(0)$ avec $f'(0) = -e^0 = -1$ et $f(0) = e^0 = 1$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\left[2\times 1\times(x-1)e^{-x} - e^{-x}(x-1)^2\right]$.

$$= -e^{-x}\left(2x-2-x^2+2x-1\right) = \left(x^2-4x+3\right)e^{-x}$$

$$= (x-1)(x-3)e^{-x}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(x-3)$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi A et B sont deux points d'inflexions de (C).

4) **a)** On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1+x^2\right)e^{-x} = \left(1+x^2\right)g(-x)$.

Donc : $f(1) = 2g(-1)$ et $f(3) = 10\,g(-3)$.

b) $A(1; f(1))$ et $f(1) = 2g(-1) = 2y_E$, donc $A(1; 2y_E)$.

$B(3; f(3))$ et $f(3) = 10\,g(-3) = g(\ln(10)-3) = y_F$, donc $B(3; y_F)$.

T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3}\times\dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

5) **a)** T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3}\times\dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

b) Voir figure.

6) **a)** Voir figure.

b) $x \mapsto -(x^2+2x+3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $F'(x) = -\left[(2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2+2x+3)\right]$

$$= -e^{-x}(2x+2-x^2-2x-3) = -e^{-x}(-x^2-1)$$

$$= (1+x^2)e^{-x} = f(x).$$

Ainsi F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

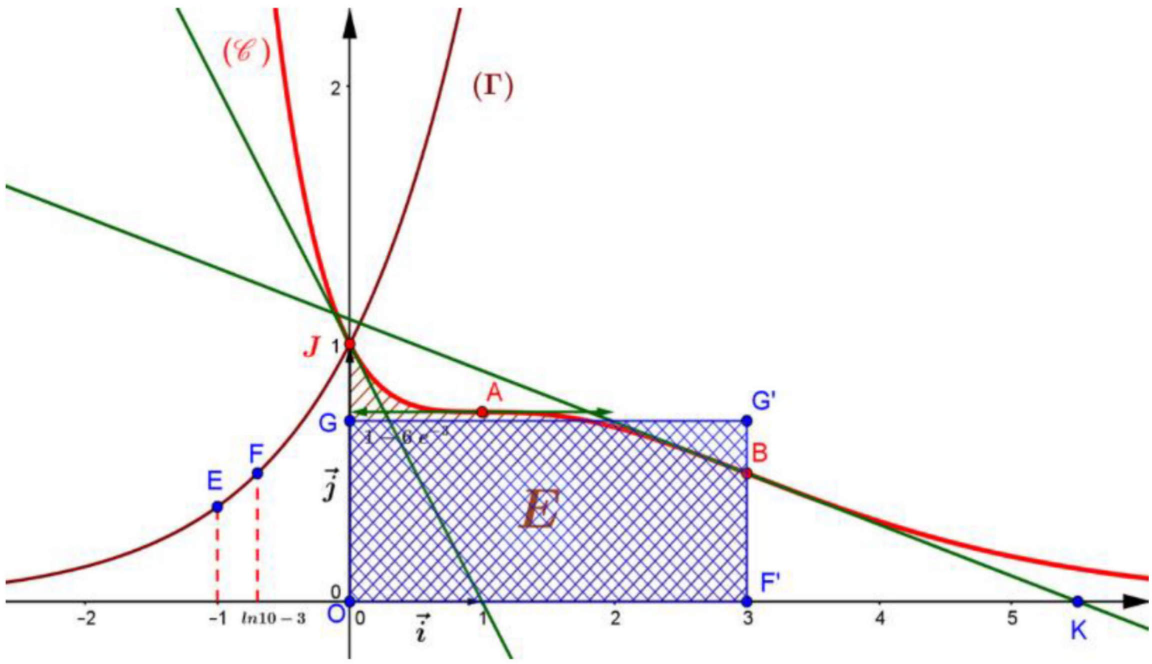
c) $S = \int_0^3 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^3 = F(3) - F(0) = -18e^{-3} + 3 = 3 - 18e^{-3}$.

d) $\overline{f} = \dfrac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx = \dfrac{1}{3}S = \dfrac{1}{3}(3-18e^{-3}) = 1 - 6e^{-3}$.

e) $S = 3 \times \overline{f} = 3 \times (1 - 6e^{-3})$.

Soient $G'(3\ ;\ 1-6\,e^{-3})$; $F'(3\ ;\ 0)$ et **A** l'aire du rectangle $OF'G'G$,

Donc $S = OF' \times OG =$ **A**.



Corrigé d'exercice N°7 : 2009 co

$f(x) = -1 + \dfrac{x-1}{x+1}e^x$.

1- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2- a) Pour tout $x \in IR - \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}e^x + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)e^x = \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x > 0.$$

b) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'(x)	+	‖	+
f(x)	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3- a) Soit g la restriction de f sur $I =]-1,+\infty[$. g est continue et strictement croissante sur I donc g réalise une bijection de I sur IR ; donc il existe un réel α unique de I tel que $f(\alpha) = 0$.

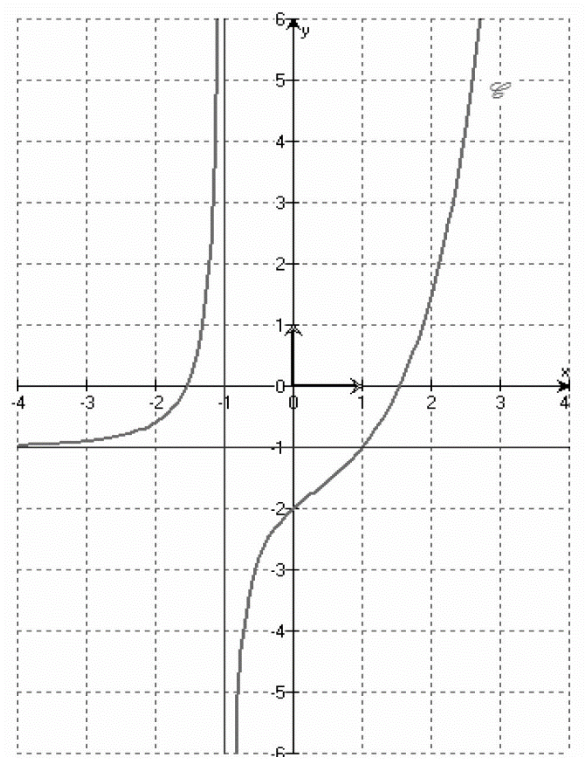
$f(1,5) = -0,1$ et $f(1,6) = 1,143$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $1,5 < \alpha < 1,6$.

b) $f(\alpha) = 0$ signifie $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}e^\alpha - 1 = 0$ signifie $\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}e^\alpha = 1$ signifie $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} = e^\alpha$.

$f(-\alpha) = -1 + \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}e^\alpha = -1 + \left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right) = -1 + 1 = 0$.

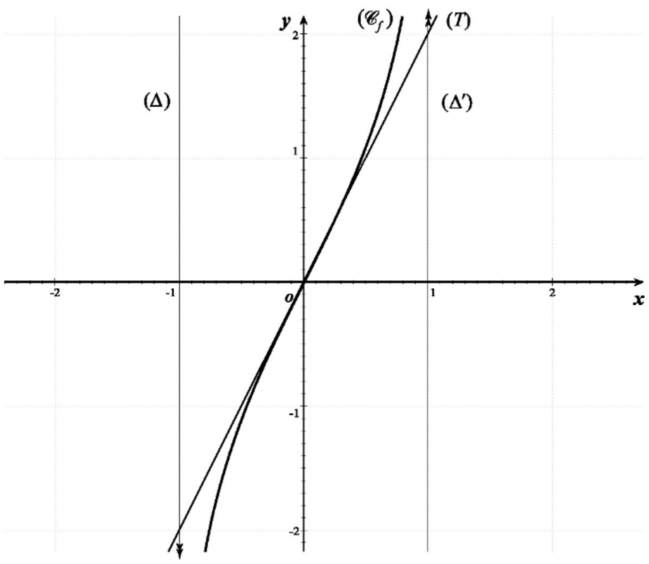
4- a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{x} + \dfrac{x-1}{x+1}\times\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$. $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

b) Traçage de $\mathscr{C}$.



Corrigé d'exercice N°8 : 2010 co

1°)



$f(0)=0$: lecture graphique immédiate sur la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

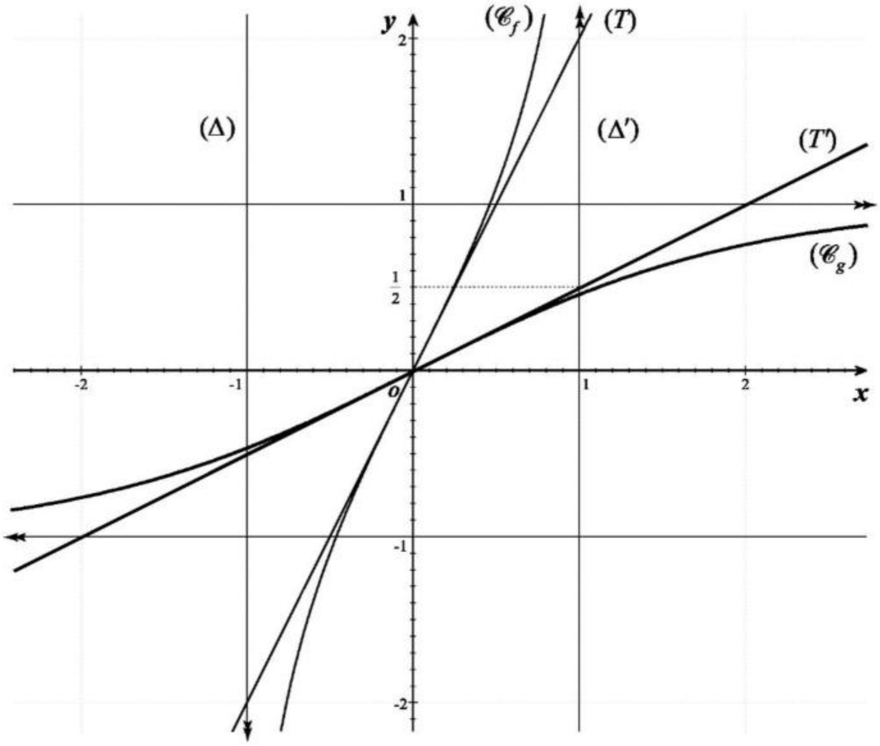
$f'(0)=2$: lecture graphique de la pente de la droite (T) , tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point O

2°) a°) $g(0)=0$: g étant la fonction réciproque de f , on a l'équivalence $f(x)=y \iff g(y)=x$.

$g'(0)=\frac{1}{2}$: formule de dérivée d'une réciproque : $g'(0)=\dfrac{1}{f'\left(g(0)\right)}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$.

2°) b°) Le tracé est jugé sur la présence des quatre éléments suivant :

- Tracé correct de deux asymptotes horizontales d'équations cartésiennes $y=1$ et $y=-1$
- Tracé correct d'une droite (T') tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point O , de pente $\frac{1}{2}$.
- Tracé correct de l'allure de $(\mathscr{C}_g)$



3°) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\dfrac{e^x(e^x+b)-e^x(e^x+a)}{(e^x+b)^2}=\dfrac{(b-a)e^x}{(e^x+b)^2}$.

D'après les résultats établis en **2°) a°)** on a :

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(0)=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1+a}{1+b}=0 \\ \dfrac{b-a}{(1+b)^2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 1+a=0 \\ 2(b-a)=(1+b)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ 2(b+1)=(1+b)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

Enfin , pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

$\boxed{\text{Note}}$: Méthode alternative : Une autre mise en équation est possible : $\begin{cases} g(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1+a}{1+b}=0 \\ \dfrac{a}{b}=-1 \end{cases} \iff \ldots$

4°) a°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

4°) b°) $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 \dfrac{1}{e^x+1}\,dx$

$= \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx - \int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$, d'après **4°) a°)** .

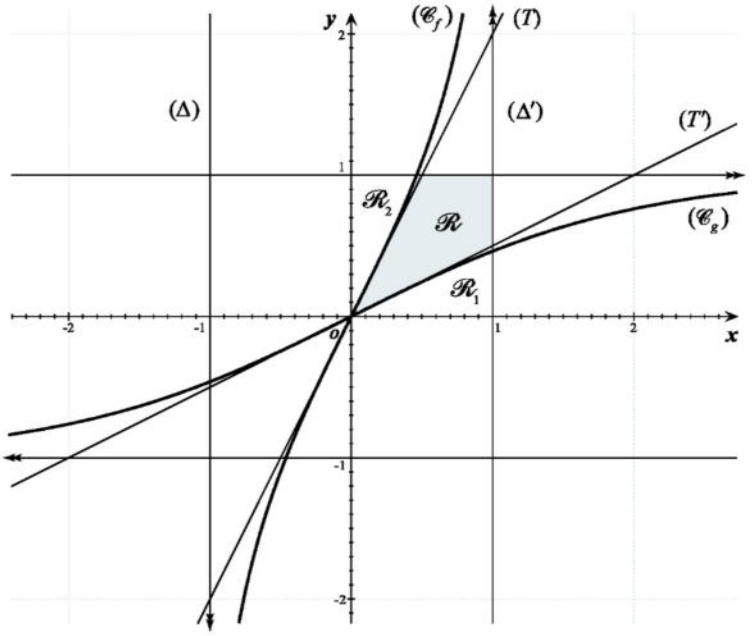
$= \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 - \left[-\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1 = \left[\ln(e^x+1)+\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1 = \left[\ln(e^x+1)+\ln(e^x+1)-x\right]_0^1$

$= \left[2\ln(e^x+1)-x\right]_0^1 = 2\ln(e+1)-1-2\ln 2$

$= 2\ln(e+1)-2\ln 2-1$

Note : Plusieurs autres résultats finaux sont possibles .

5°) a°) L'aire $\mathscr{A}$ demandé est celle de la région $\mathscr{R}$ du plan, décrite dans l'énoncé, et hachurée dans la figure suivante :



L'aire $\mathscr{A}$ de cette région $\mathscr{R}$, est celle du carré unité , duquel on soustrait les deux aires des deux régions $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ définies par :

$\mathscr{R}_1$: domaine limité par les droites d'équations respectives $y=0$ et $x=1$ et la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

$\mathscr{R}_2$: domaine limité par les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

On a ainsi : $\mathscr{A}(\mathscr{R}) = 1-\left[\mathscr{A}(\mathscr{R}_1)+\mathscr{A}(\mathscr{R}_2)\right]$

Pour des raisons de symétrie évidentes, on a : $\mathscr{A}(\mathscr{R}_2) = \mathscr{A}(\mathscr{R}_1) = \int_0^1 g(x)\,dx$.

On en déduit alors que $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathscr{R}) = 1-2\mathscr{A}(\mathscr{R}_1) = 1-2\int_0^1 g(x)\,dx$.

5°) b°) On a : $\mathscr{A} = 1-2\int_0^1 g(x)\,dx = 1-2\left[2\ln(e+1)-2\ln 2-1\right] = 3+4\ln 2-4\ln(e+1)$ (ua)

Corrigé d'exercice N°9 : 2011 co

x	-ζ		0		+ζ
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	+ζ	↘	1	↗	+ζ

I- On pose $f(x) = e^x - x$.

1) Variations de f :

♦ $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$.

♦ $f'(x) = 0$ signifie $e^x = 1$ signifie $x = 0$.

♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty(+\infty - 1) = +\infty$.

2) Déduisons que pour tout x , $e^x - x$ ✇ 1

On a d'après le tableau de variation , pour tout x : $f(x)$ ✇ 1 signifie $e^x - x$ ✇ 1.

II- 1) a/ ♦ $g(1) = \dfrac{1}{2}$. ♦ $g(2) = 0$. ♦ $g(3) = \dfrac{1}{2}$.

b / ♦ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ (la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C_g.).

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

(C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ voisinage de + ⌘)

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$

(C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisiange de + ⌘).

c / Tableau de signe de g'(x) :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) On pose $h(x) = e^{g(x)}$.

a) ♦ $h(1) = e^{g(1)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. ♦ $h(2) = e^{g(2)} = e^0 = 1$ ♦ $h(2) = e^{g(3)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

b/ ♦ $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{g(x)} = e^{+\infty} = +\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{g(x)} = e^{+\infty} = +\infty$

c / ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{g(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{g(x)}}{g(x)}\frac{g(x)}{x}$

♦ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{g(x)}}{g(x)}=+\infty$

♦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=+\infty$.

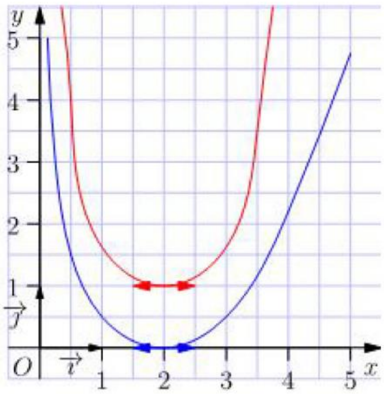
Ainsi C_h admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j}\,)$ au voisinage de $+\infty$.

d / tableau de variation de h :

♦ $h'(x)=\left(e^{g(x)}\right)'=g'(x)\,e^{g(x)}$, ainsi le signe de h'(x) est celui de g'(x) puisque $e^{g(x)}>0$.

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
h	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) Soit $\alpha>0$, $M(\alpha, g(\alpha))$ et $N(\alpha, h(\alpha))$.



a / MN =
$|h(\alpha)-g(\alpha)|=|e^{g(\alpha)}-g(\alpha)|=|f(g(\alpha))|=f(g(\alpha))$

(car pour tout x, f(x) >0).

b / MN est minimale signifie que $f(g(\alpha))$ est minimale signifie $g(\alpha)=0$ signifie $\alpha=2$.

4) Courbe de C_h.

♦ C_h admet une branche parabolique suivant $(O,\vec{j}\,)$.

La droite $x=0$ est asymptote verticale à C_h.

Corrigé d'exercice N°10 : 2012 co

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+xe^{-x}+2e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1.$ (traçage de l'asymptote : voir graphique)

2) a) $x+2-\dfrac{xe^{x}+e^{x}}{e^{x}+1} = \dfrac{(e^{x}+1)(x+2)-xe^{x}-e^{x}}{e^{x}+1} = f(x).$

b)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left(\dfrac{xe^{x}+e^{x}}{e^{x}+1}\right) = 0.$ La droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote à C_f en $-\infty$.

c) le signe de $f(x)-(x+2)$ est celui de $-(x+1)$.

Sur $]-\infty,-1]$, C_f est au dessus de Δ.

Sur $[-1,+\infty[$, C_f est au dessous de Δ.

3) $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{(e^{x}+1)(e^{x}+1)-e^{x}(e^{x}+x+2)}{(e^{x}+1)^2} = \dfrac{1-xe^{x}}{(e^{x}+1)^2}.$

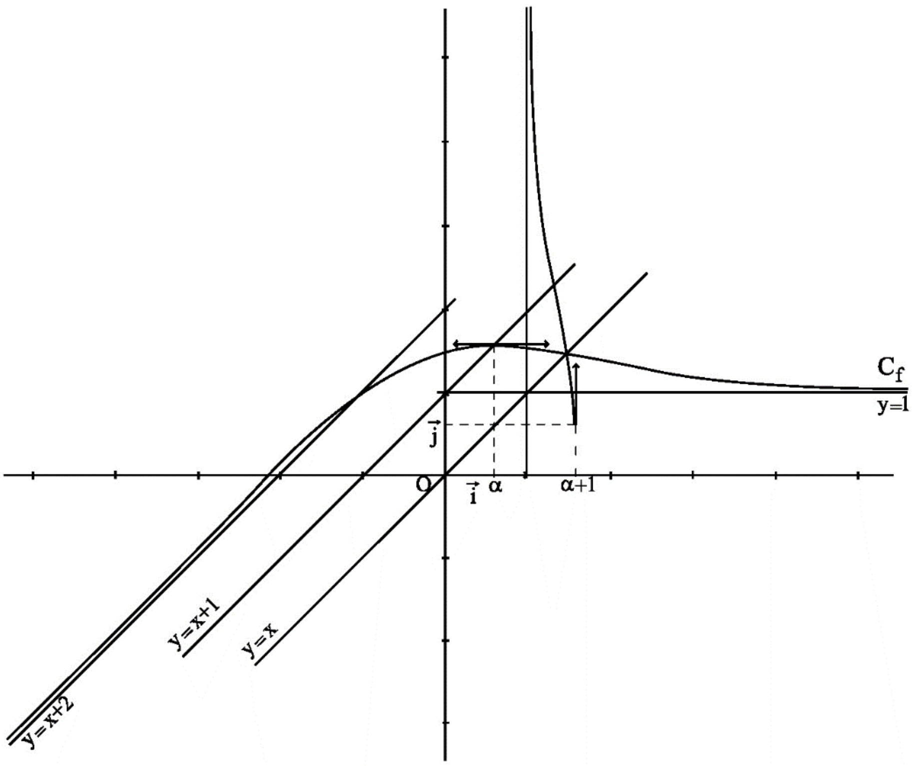
4) a) $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ donc $\alpha \neq 0$.

b) $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1-\alpha e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$, $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha}+\alpha+2}{e^{\alpha}+1} = \dfrac{\frac{1}{\alpha}+\alpha+2}{\frac{1}{\alpha}+1} = \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha+1} = \alpha+1$

c) $A \in C_f \cap \Delta'$ avec Δ' : $y = x+1$. La tangente à C_f en A est parallèle à (x'x).

5) a) h est strictement décroissante sur $[\alpha,+\infty[$ alors elle réalise une bijection de $[\alpha,+\infty[$ sur son image par h.
Comme h est continue sur $[\alpha,+\infty[$ alors $h([\alpha,+\infty[) =]1,\alpha+1]$.

b)



Corrigé d'exercice N°11 : 2014 co

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \left(1-\frac{1}{x}\right) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{i})$ en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x\left(1-\frac{x-1}{x\ln x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\frac{x-1}{x\ln x}\right) = -\infty.$

2) a) $\begin{cases} x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ x \mapsto \frac{x-1}{x} \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases}$, il en résulte que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$

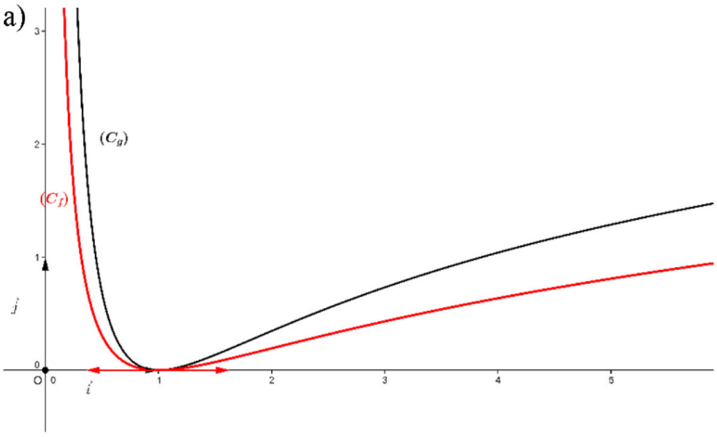
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$	

3) a) La fonction $g-f$ admet un minimum global sur $]0,+\infty[$ égal à 0 donc pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$. Il en résulte que (C_g) est au-dessus de (C_f).

b) $M(a,f(a))$ et $N(a,g(a))$ donc $MN^2 = (g(a)-f(a))^2$, or $a>1$ donc $0<g(a)-f(a)<1$(d'après le tableau donné) d'où $0<(g(a)-f(a))^2<1$, il en résulte que $MN^2<1$ donc $MN<1$.

4) a)



b) pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $g(x)-f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x - \ln x + \frac{x-1}{x} = \left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x - \ln x + \left(1-\frac{1}{x}\right)$

$= \ln x - \frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$

c) $A = \int_1^e (g(x)-f(x))dx = \int_1^e \left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx = \left[x - \ln x - \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \left(e-\frac{5}{2}\right)$ua.

Corrigé d'exercice N°12 : 2015 co

1/ a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. le signe est celui de $x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$		$\nearrow$	

b) $g(1)=1$. La fonction g admet sur $]0,+\infty[$ un minimum global en 1 égal à 1, il en résulte que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x)>0$.

2/ a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

$$f'(x)=2-2\frac{\ln x}{x}=2\frac{(x-\ln x)}{x}=\frac{2g(x)}{x}.$$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3/ a) Soit T la tangente à C_f au point d'abscisse 1, alors T à pour équation $y=f'(1)(x-1)+f(1)=2x$.
Il en résulte que Δ est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-(\ln x)^2\right]=+\infty \end{cases}$. On en déduit que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ.

c) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)-2x=\left[-(\ln x)^2\right]\le 0$ donc C_f est au-dessous de la droite Δ et le point de coordonnées $(1,2)$ est un point d'intersection.

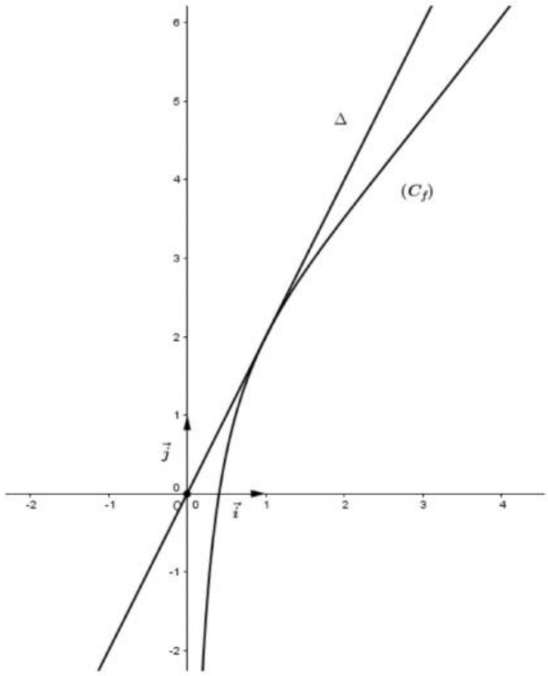
4/ a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

$0\in\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$.

$\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right)\approx -1.4<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0.5>0 \end{cases}$. Il en résulte que $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{2}$.

b)



c) $A=\int_1^{e}|f(x)-2x|dx=\int_1^{e}(\ln x)^2dx$.

On pose $\begin{cases} u(x)=(\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{2\ln x}{x} \\ v(x)=x \end{cases}$

$$A=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e \ln x\,dx=e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e=(e-2)\text{ua}.$$

Corrigé d'exercice N°13 : 2016 co

1) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=2xe^x+x^2e^x=\left(x^2+2x\right)e^x>0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, il en résulte que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Si $x\in]0,1[$, $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}<0$, il en résulte que $x<\dfrac{1}{x}$.

Si $x\in]1,+\infty[$, $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}>0$, il en résulte que $x>\dfrac{1}{x}$.

c) Si $x\in]0,1[$, $x<\dfrac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)<g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Si $x\in]1,+\infty[$, $x>\dfrac{1}{x}$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc $g(x)>g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+2\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x-2+\dfrac{2}{x}\right)e^x+e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\dfrac{2}{x}\right)e^x+\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=+\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. La droite $x=0$ est une asymptote de (C_f).

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$. La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ en $+\infty$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=x^2e^x-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=g(x)-g\left(\dfrac{1}{x}\right).$

b) $f'(1)=g(1)-g(1)=0.$

c)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$2e$	↗ $+\infty$	

4) a) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)-h(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^x>0$ car $x^2-2x+2>0$, $(\Delta=-4)$. Il en résulte que (C_f) est au-dessus de (C_h).

b) Voir figure.

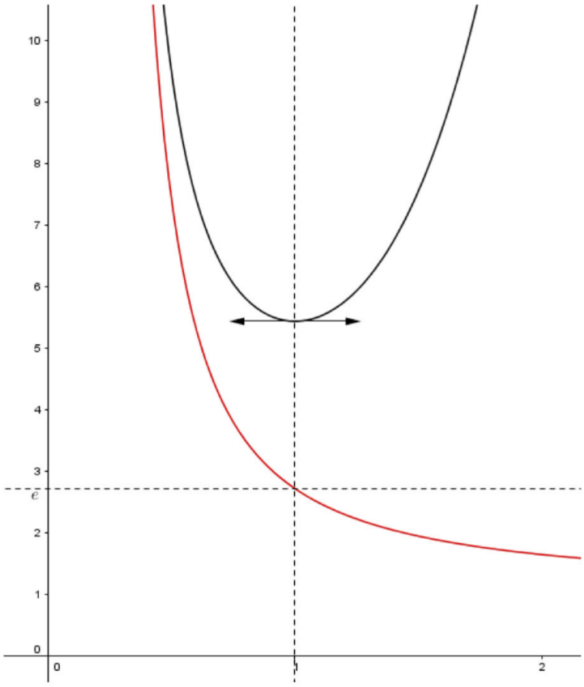
5) a) $\int_1^x (f(t)-h(t))dt = \int_1^x (t^2-2t+2)e^t dt = \int_1^x (t^2+2t)e^t dt + 2\int_1^x e^t dt - 4\int_1^x te^t dt$

$= [g(t)]_1^x + 2[e^t]_1^x - 4\int_1^x te^t dt = x^2e^x - e + 2e^x - 2e - 4\int_1^x te^t dt = x^2e^x + 2e^x - 3e - 4\int_1^x te^t dt$

On pose $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(x)=e^t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(x)=1 \\ v(x)=e^t \end{cases}$

$\int_1^x te^t dt = [te^t]_1^x - \int_1^x e^t dt = xe^x - e - [e^t]_1^x = xe^x - e^x.$

Donc $\int_1^x (f(t)-h(t))dt = x^2e^x + 2e^x - 3e - 4(xe^x - e^x) = (x^2-4x+6)e^x - 3e.$



b) $A_\alpha = \int_\alpha^1 (f(t)-h(t))dt = 3e - (\alpha^2 - 4\alpha + 6)e^\alpha.$

$\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A_\alpha = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} 3e - \alpha^2e^\alpha - 4\alpha e^\alpha + 6e^\alpha = 3e.$

Corrigé d'exercice N°14 : 2017 co

1) **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$ et $\ln(x+1) > 0$ pour tout $x > 0$ donc $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$.

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote a ($\mathscr{C}$).

b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$.

c) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}=0$. Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f=1$.

La droite $\Delta : y = 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2) **a)** Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\ln(x)}{\ln^2(x+1)}\times\dfrac{x(x+1)}{x(x+1)}$

$$=\frac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$=\frac{x\ln(x+1)+\ln(x+1)-x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$=\frac{x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

b) Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $f'(x)=\dfrac{x\left(\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln(x)\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$=\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $1+\frac{1}{x}>1$ et $x+1>1$

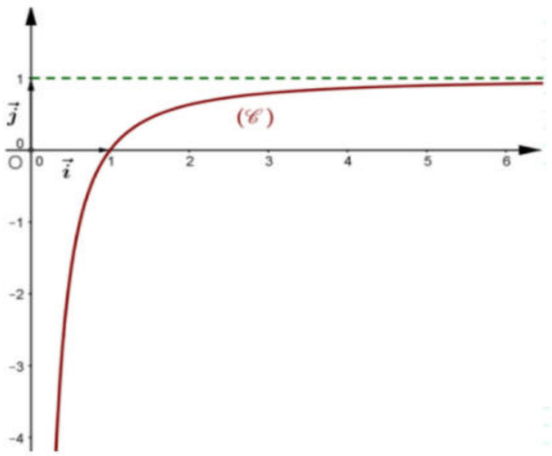
Donc $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$ et $\ln(x+1)>0$

Ainsi $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln(x+1)>0$ et $x(x+1)\ln^2(x+1)>0$.

Donc pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$; $f'(x)>0$ Par suite f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$.

c)

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow 1$



3) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$.

Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

$\lim\limits_{x\to0}f^{-1}(x)=f^{-1}(0)=1$ car f^{-1} est continue en 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

b) pour tout $n\geq2$; $a_n=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie $f(a_n)=\frac{1}{n}$

signifie $\frac{\ln(a_n)}{\ln(a_n+1)}=\frac{1}{n}$

signifie $n\ln(a_n)=\ln(a_n+1)$

signifie $\ln\left((a_n)^n\right)=\ln(a_n+1)$

signifie $(a_n)^n=a_n+1$.

Ainsi a_n est une solution de l'équation : $x^n = x + 1$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+1)=2$.