

**Exercice n°1 :**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $h(x) = (x-2)e^x + 2$

1) Déterminer les variations de  $h$  (on précisera  $h(0)$ ).

2) Montrer qu'il existe un unique réel  $a$  de l'intervalle  $[1, 2]$  tel que  $h(a) = 0$ .

En déduire le signe de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$

a/ Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

b/ Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif  $f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}$

Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c/ Montrer que  $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$  et en déduire le signe de  $f(a)$ .

4) Tracer la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé

**Exercice n° 2 :**

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

On désigne par  $C$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Etudier la parité de  $f$ .

2) a/ Etudier les variations de  $f$ .

b/ Tracer  $C$

3) Soit  $\lambda > 1$  et la droite  $\Delta : x = \lambda$ .

On note  $A(\lambda)$  l'aire de la partie du plan limitée par  $C$ ,  $\Delta$ , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Calculer  $A(\lambda)$ .

**Exercice n°3 :**

I) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x(1-x) + 1$ .

1) Etudier le sens de variation de  $g$ .

2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[1.27, 1.28]$ . on note  $a$  cette solution.

3) Déterminer le signe de  $g(x)$ .

II) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$

On désigne par  $C$  la courbe de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter.

2) a/ Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .



b/ Montrer que la droite D d'équation  $y = x + 2$  est une asymptote à C

c/ Etudier la position de C par rapport à D

3)a/ Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g

b/ Dresser le courbe de variations de f

4) Tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse a .

III) Pour tout entier naturel n , tel que  $n \geq 2$  , on note  $D_n$  l'ensemble des points  $M(x,y)$  du plan , dont les coordonnées vérifient  $2 \leq x \leq n$  et  $2 \leq y \leq f(x)$  et on appelle  $A_n$  son aire , exprimée en unités d'aire.

1) Faire apparaître  $D_5$  sur la figure .

2) Montrer que pour tout réel  $x \geq 2$  ,  $\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x + 1} \leq xe^{-x}$

3) on pose  $I_n = \int_2^n xe^{-x} dx$  . A l'aide d'une intégration par parties , calculer  $I_n$  en fonction de n .

4) Ecrire un encadrement de  $A_n$  en fonction de  $I_n$  .

5) Montrer que la suite  $(A_n)$  est croissante et majorée .

Déterminer la limite de  $I_n$  lorsque n tend vers  $+\infty$  Que peut-on en déduire pour la limite de  $A_n$  lorsque n tend vers  $+\infty$  ? .

#### Exercice n°4 :

I) 1/ Soit g la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

a/ Etudier les variations de g .

b/ En déduire le signe de g.

2/ Soit h la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $h(x) = (2-x)e^x - 1$

a/ Etudier la fonction h et dresser son tableau de variation .

b/ Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[1, 2]$

c/ Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$

d/ Préciser suivant les valeurs réel positif x le signe de h(x).

II) Soit f la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$  et C sa courbe dans un repère orthonormé .

1)a/ Montrer que pour tout  $x \neq 0$  on peut écrire  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$  .

En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interpréter .

b/ Montrer que  $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de f .

2)a/ Montrer que pour tout x  $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

b/ En déduire la position relative de courbe C et de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$

3)a/ Préciser la tangente à C en son point d'abscisse 0 .

b/ Tracer C

