Exercice N°1:

I- Soit f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$; $\left(\ \left\|\vec{i}\right\|=4\text{cm}\right)$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, interpréter graphiquement les résultats obtenus

2/ Dresser le tableau de variation de f

3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 0

4/ Soit g la fonction définie par $g(x)=f(x)-x$

a) Etudier les variations de g

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que : $0,4<\alpha<0,5$

5/ Construire T et C

II - 1/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J dont on précisera

2/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in J$ (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

3)a) Donner le tableau de variation de $f^{-1}(x)$

b) Donner une équation de la tangente T' à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$

c) Construire T' et $C_{f^{-1}}$ dans le repère R

III-

1/ Vérifier que : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

2/ Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

3/ Montrer que $F(0)-F(-1)=\text{Log}(\dfrac{1+e}{2})$

Exercice N°2:

I- Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^{2}+1-\text{Log}x$

1 / Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

2/ En déduire pour tout x de $]0,+\infty[$; $g(x)>0$

II- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+1+\dfrac{\text{Log}x}{x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$; $\forall\ x\in\,]0,+\infty[$

b) Dresser tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite D : y = x + 1 est une asymptote à ζ_f

b) Etudier les positions de ζ_f par rapport à D

3/a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que l'équation f(x)= 0 admet une solution unique α et que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

4/ Tracer D , ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

5/ Soit F une primitive de f sur $]0,+\infty[$

Montrer que $F(e)-F(1)=\dfrac{e^2+2e-2}{2}$

Exercice N°3:

Soit f la fonction définie par f(x) = x - $\dfrac{1}{e^x-1}$.

I) 1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que (C_f) admet deux asymptotes obliques d'équations respectives :

Δ : y = x et Δ' : y= x + 1

b) Montrer que $\omega(0;1/2)$ est un centre de symétrie de (C_f).

3) Soit g la restriction de f sur]0, +∞[

a) Montrer que g réalise une bijection de]0, +∞[sur IR.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0, admet une unique solution α et que :

$\text{Log}2 < \alpha < 1$

c) Montrer que $f'(\alpha) = 1+\alpha+\alpha^2$

d) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse α

e) Tracer T, Δ, Δ' et (C_f) dans un repère orthonormé R=$(o,\vec{i},\vec{j})$.(on prend α =0.8)

II) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g et (C') sa courbe représentative dans le repère R.

1) Montrer que g^{-1} est dérivable sue IR et calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction de α.

2) La courbe (C') coupe (xx') en un point I, écrire la tangente T' à (C') en I.

3) Tracer (C') et T' dans le même repère R.

Exercice N°4:

1) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = -1 + (1 - x)\, e^{-x}$

a) Calculer g'(x). Etudier son signe.

b) Démontrer que la limite de g en $+\infty$ est égale à -1.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $g(x) \leq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x\, e^{-x} - x + 4$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

(unité:2cm)

a) Vérifier que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$. Préciser la limite de f en $+\infty$.

3) a) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = -x + 4$ est asymptote à (C_f).

Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ.

b) Soit D la droite d'équation : $y = -\frac{x}{2} + 4$

Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et D.

c) Préciser la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

d) Construire la courbe (C_f).

Exercice N°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1/a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Etudier les variations de la fonction $g(x)=f(x)-x$. (remarquer que : $e^{2x}-2e^x+1=(e^x-1)^2$)

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$ et que $a\in\,]2;3[$

3/a) Montrer que $\forall x\in\,]2;3[$ on a : $|f'(x)|\le 0,5$

b) En déduire que $\forall\, x\in[2;3]$ on a : $|f(x)-a|\le 0,5.|x-a|$

4/ Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases}V_0=3\\ V_{n+1}=f(V_n)\end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 2\le V_n\le 3$

b) Montrer que : $|V_{n+1}-a|\le 0,5.|V_n-a|$

c) Déduire que $\forall n\in\mathbb{N}\ :|V_n-a|\le(0,5)^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

Exercice N°6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé R= $(o,\vec{i},\vec{j})$

Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\ln(1+e^{-x})$. On désigne par (Γ) la courbe de f dans le repère R.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) a) Montrer que pour tout réel x ; f(x) = - x + $\ln(1+e^x)$.

b) En déduire que la courbe (Γ) admet au voisinage de (- ∞) une asymptote Δ

dont on précisera une équation cartésienne.

3) a) Vérifier que pour tout réel x ; f '(x) = $\frac{-1}{1+e^{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) On considère les points A, B et C de (Γ) d'abscisses respectives $x_A = 0$, $x_B = 1$ et $x_C = -1$ et soit T_0 la tangente à la courbe (Γ) au point A.

Montrer que la droite (BC) est parallèle à T_0.

5) Tracer Δ, T_0 et (Γ).

Exercice N°7

I) Soit g la fonction définie sur IR par g(x) = $(1-x)e^{x}+1$

1) Etudier le sens de variation de g.

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution x_0 et que $x_0 \in [1.2, 1.3]$

3) Déterminer le signe de g(x).

II) Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = $\frac{x}{e^{x}+1}+2$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé R= $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite D d'équation : y = x + 2 est asymptote de (C).

c) Etudier la position de (C) par rapport à D.

3) a) Montrer que f '(x) = $\frac{g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.

Exercice N°8

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé R=$(o,\vec{u},\vec{v})$. (Unité 2cm)

A)

1) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter les résultats obtenus.

b) Montrer que f est dérivable sur IR et vérifier que f '(x) = $\dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit h(x) = f(x) – x.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution $\alpha \in IR$ et vérifier que ½ < α < 1

c) En déduire la position de (ζ_f) par rapport à la droite Δ : y = x.

3) a) Montrer que le point I(0, ½) est un centre de symétrie de (ζ_f).

b) Déterminer une équation de la tangente T à (ζ_f) au point I.

B)

1) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

c) Déterminer une équation de la tangente T' à $(\zeta_{f^{-1}})$ au point d'abscisse 1/2

2) Expliciter f^{-1}(x) pour x dans J.

3) Tracer dans le repère R les droites Δ, T et T' et les courbes (ζ_f) et $(\zeta_{f^{-1}})$.

<u>Exercice N°9</u>

Soit la fonction f définie sur [0, +∞ [par $\begin{cases} f(x) = x + x(lnx)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 4cm).

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = (1 + lnx)^2$.

d) Dresser le tableau de variations de f.

2)a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 .

b) Etudier la position relative de (C) et T.

c) Construire T et (C).

3) Soit la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ définie par $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n dx$.

a) A l'aide dune intégration par partie Calculer I_1.

b) Montrer que pour tout $n\geq 1$ on a : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=1$, $x=e$ et $y=0$. Calculer A en cm^2.

La confiance en soi est le premier secret du succès (RalphWaldo Emerson)