

### Exercice N°1 :

A/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 + 2x \ln x$

1/ Etudier les variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ , (on pourra remarquer que  $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = -\frac{3}{2}$ ).

2/ Calculer  $g(1)$  puis en déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x > 0$

B/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{(1+x)^2}$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/a- Vérifier que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^3}$ .

b- Dresser le tableau de variation de  $f$

c- Etudier les branches infinies de  $C$ .

3/ Déterminer une équation de la tangente à  $C$  au point d'intersection de  $C$  avec l'axe des abscisses.

4/ Tracer  $C$ .

C/ Soit un réel  $\lambda > 1$ .

1/ Vérifier que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ .

2/ En déduire  $\int_1^\lambda \frac{dx}{x(1+x)}$

3/ On pose  $A(\lambda)$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = \lambda$ .

a- A l'aide d'une intégration par partie, déterminer  $A(\lambda)$ .

b- Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

### Exercice N°2 :

I/ On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x(x-1) + \ln x$ .

1/ Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

2/ Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x > 0$ .

II/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x-1)^2 + \ln^2 x$

On désigne par  $C_1$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = 2 \frac{g(x)}{x}$  pour  $x > 0$

c- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

2/ Montrer que la restriction  $h$  de  $f$  à  $]0, 1]$  est une bijection de  $]0, 1]$  sur  $[0, +\infty[$ .



On désigne par  $h^{-1}$  la réciproque de  $h$  et par  $C_2$  la courbe représentative de  $h^{-1}$  dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

3/ Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0, 1]$  par  $u(x) = h(x) - x$

a- Dresser la tableau de variation de  $u$  sur  $]0, 1]$ .

b- En déduire qu'il existe un seul réel  $a$  de  $]0, 1]$  tel que  $h(a) = a$ .

c- Vérifier que  $0.5 < a < 1$ .

4/a- Montrer que  $C_1$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de  $(o, \vec{j})$ .

b- Tracer dans le même repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ , la courbe  $C_1$  et la courbe  $C_2$

### Exercice N°3 :

A/ 1/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $R_+^*$  par  $g(x) = (1-x) \ln x - x$ . Déterminer le signe de  $g(x)$

2/ Soit  $h$  la fonction définie sur  $R_+^*$  par  $h(x) = \ln x - x$

a- Dresser le tableau de variation de  $h$ .

b- En déduire le signe de  $h$ .

B/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $R_+^*$  par  $f(x) = \ln x (\ln x - x)$ .

On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Montrer que  $f$  est dérivable sur  $R_+^*$  et que  $f'(x) = \frac{g(x) + h(x)}{x}$

2/ Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ Déterminer la nature des branches infinies de  $C_f$  avec l'axe des abscisses.

4/a- Déterminer le point d'intersection de  $C_f$  avec l'axe des abscisses.

b- Déterminer une équation de tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse 1

c- Vérifier que le point  $A(e, -e+1)$  est un point d'intersection de  $C_f$  avec  $T$ .

5/ Construire  $C_f$  et  $T$ .

6/ Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $D$  la partie du plan limitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 1$

a- Calculer à l'aide, d'une intégration par parties  $\int_{\alpha}^1 \ln^2 x dx$  et  $\int_{\alpha}^1 x \ln x dx$ .

b- En déduire, à l'aide de  $\alpha$ , l'aire  $A(\alpha)$  de  $D$ .

c- Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$

7/ a- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $R_+^*$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

c- Tracer dans le même repère la courbe de  $f^{-1}$ .

### Exercice N°4 :

A/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}$  on désigne par  $C_f$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  →

Interpréter les résultats graphiquement.

2/a- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  par  $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(\ln x)^2}$

b- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $]0, 1[$ .

a- Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b- Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet dans  $]0, 1[$  une unique solution  $\alpha$  et que



$0.5 < \alpha < 0.6$ .

c- En déduire que  $C_f$  coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera .

4/ Tracer  $C_f$ .

5/ Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction  $h^{-1}$

6/a- Montrer que  $h'(\alpha) = -\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$

b- Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable en 0 et exprimer  $(h^{-1})'(0)$  en fonction de  $\alpha$

B/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $]1, +\infty[$  par  $g(x) = 2f(x^2)$ .

On désigne par  $C_g$  la courbe de  $g$  repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Vérifier que pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,  $f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

2/ En déduire la position relative de  $C_f$  et  $C_g$  sur  $]1, +\infty[$ .

3/ Soit  $x \in [2, +\infty[$ , on désigne par  $M$  et  $N$  les points respectifs de  $C_f$  et  $C_g$  d'abscisses  $x$ .

Pour quelle valeur de  $x$ , la distance  $NM$  est-elle maximale ?.

### Exercice N°5 :

I/1- Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x - \ln x$ .

a- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b- En déduire que pour tout réel  $x$  de  $]0, +\infty[$ ,  $h(x) \geq 1$

2/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a- Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

b- La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en 0

II/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ .

1/a- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ .

b- Montrer que pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$   $f'(x) = \frac{\ln(2x) - \ln x}{h(2x)h(x)}$  et  $f'_d(0) = 0$

2/ Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$   $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$

3/ Montrer que pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$   $0 \leq f(x) - \ln 2 \leq \frac{\ln(2x)}{x - \ln x}$  en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

4/ a- Montrer que  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln 2$ .

b- Montrer alors qu'il existe un réel  $\alpha$  de  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  tel que  $f(\alpha) = \ln 2$

5/a- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c- Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

(On donne  $f(1) \approx 0.9$  et  $f(2) \approx 1.1$ )

III/ Dans tout cette partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

1/ Soit la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = \int_n^1 \frac{t}{t - \ln t} dt$ ,  $n \geq 1$

a- Montrer que pour tout  $t$  de  $]0, +\infty[$ ,  $\frac{t}{t - \ln t} \leq t$ .

b- Montrer que la suite  $(V_n)$  est croissante.

c- En déduire que la suite  $(V_n)$  est convergente et que  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \leq \frac{1}{2}$



2/ Soit la suite  $(W_n)$  définie par

$$W_n = \int_1^n \frac{t}{t - \ln t} dt, n \geq 1$$

a – Montrer que pour tout  $t$  de  $[1, +\infty[$ ,  $1 \leq \frac{t}{t - \ln t}$

c- En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} W_n$

FEHRI BECHIR