

# Fiche cours **NOMBRES COMPLEXES**

Ce qu'il faut absolument savoir sur les nombres complexes

## Forme (écriture) algébrique ou cartésienne

$a$  et  $b$  sont deux réels  $z = a + ib$  avec  $i^2 = \dots$ , on a donc  $i^3 = \dots$  ;  $i^4 = \dots$

$a = \operatorname{Re}(z) : \dots$  ;  $b = \operatorname{Im}(z) : \dots$

$z = 0 \Leftrightarrow \dots$  ;  $z = z' \Leftrightarrow \dots$

**Le module de  $z$**  est  $|z| = \dots$

**Conjugué de  $z$**  est  $\bar{z} = \dots$  ;  $\frac{z+\bar{z}}{2} = \dots$  ;  $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \dots$  ;  $z\bar{z} = \dots$

$z$  est réel  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots$  ;  $z$  est imaginaire pur  $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots$

Soit  $M$  le point d'affixe  $z$  c-a-d le point de coordon-

nées  $(a; b)$  dans un RON direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Un argument de  $z$**  est  $\arg(z) \equiv \dots$

$\arg(zz') \equiv \dots$  ;  $\arg(\bar{z}) \equiv \dots$  ;  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \dots$

## Forme trigonométrique ou géométrique

On note  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$  ; on a  $\cos \theta = \dots$  ;  $\sin \theta = \dots$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \leftarrow$  Forme trigonométrique (ou géométrique) .. On note  $z = [r; \theta]$

**Forme exponentielle**  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$  ;  $z = re^{i\theta} \leftarrow$  Forme exponentielle de  $z$

$e^{i0} = \dots$  ;  $e^{i\pi} = \dots$  ;  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots$  ;  $e^{i(\theta+\theta')} = \dots$  ;  $\frac{1}{e^{i\theta}} = \dots$  ;  $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \dots$  ;

$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dots$  ;  $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \dots$  ;  $(e^{i\theta})^n = \dots = \cos \dots + i \sin \dots$

**Vecteurs** \_ Soit  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A, z_B$  et  $z_C$

$\operatorname{Aff}(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = \dots$  ;  $AB = \dots$  ; si  $I = A * B$ ,  $z_I = \dots$

$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$  est réel  $\Leftrightarrow \dots$  ;  $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$  est imaginaire pur  $\Leftrightarrow \dots$

$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dots$



## APPLICATION

Dans le plan complexe, on désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes

$$z_A = 2i, z_B = \sqrt{3} + i \text{ et } z_C = \sqrt{3} - i$$

Déterminer :

$$\operatorname{Re}(z_A) = \dots ; \operatorname{Re}(z_B) = \dots ; \operatorname{Re}(z_C) = \dots$$

$$\operatorname{Im}(z_A) = \dots ; \operatorname{Im}(z_B) = \dots ; \operatorname{Im}(z_C) = \dots$$

$$|z_A| = \dots$$

$$|z_B| = \dots$$

$$|z_C| = \dots$$

### Un argument de A

$$\text{On a : } \cos(\arg(z_A)) = \dots \text{ et } \sin(\arg(z_A)) = \dots$$

$$\text{Donc } \arg(z_A) \equiv \dots$$

### Un argument de B

.....  
.....

### Un argument de C

.....  
.....

### Forme ou écriture trigonométrique et exponentielles

$$z_A = \dots$$

$$z_B = \dots$$

$$z_C = \dots$$

$$AB = \dots$$

$$BC = \dots$$

$$CO = \dots$$

$$OA = \dots$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$



## Racine carrée d'un nombre complexe

1. Déterminer les racines carrées de  $21 + 20i$ .

Soit  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels, tel que  $z^2 = 21 + 20i$ .

On a donc ;  $z^2 = 21 + 20i \Leftrightarrow (x + iy)^2 = 21 + 20i \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Et  $|z^2| = |21 + 20i| \Leftrightarrow |z|^2 = \dots\dots\dots \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

On obtient le système ;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dots & l_1 \\ x^2 - y^2 = \dots & l_2 \\ 2xy = \dots & l_3 \end{cases}$$

$l_1 + l_2$  donne ;  $\dots\dots\dots$

$l_1 - l_2$  donne ;  $\dots\dots\dots$

Or d'après  $l_3$ ,  $2xy = 20$  en déduit que  $x$  et  $y$  sont de  $\dots\dots\dots$

On en déduit donc que seulement les couples  $(5; 2)$  et  $(-5; -2)$  solutions du système précédent.

Ainsi les racines carrées de  $21 + 20i$  sont  $\dots\dots\dots$

## Résolution d'équation du second degré

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - (5 - 4i)z - 3 - 15i = 0$ .

On a  $\Delta = \dots\dots\dots$

Or  $21 + 20i = (5 + 2i)^2$  donc  $\dots\dots\dots$

On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation.

On a :  $z_1 = \dots\dots\dots$

Et  $z_2 = \dots\dots\dots$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\dots\dots\dots\}$$

Racine  $n^{\text{ième}}$  d'un nombre complexe

Soit  $a = |a|$  où  $r > 0$  et  $\theta$  un argument de  $a$ .

L'équation  $z^n = a$ , admet dans  $\mathbb{C}$ ,  $n$  solutions définies par :

$$z_k = re^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ et } r = \sqrt[n]{|a|}$$

Cas particulier si  $a = 1$ , c-a-d  $z^n = 1$

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$  ;  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , ses racines sont appelées racines nièmes de l'unité

Exemple :  $z^3 = 1$ ,  $S_{\mathbb{R}} = \left\{1; e^{\frac{i\pi}{3}}; e^{\frac{i2\pi}{3}}\right\}$

