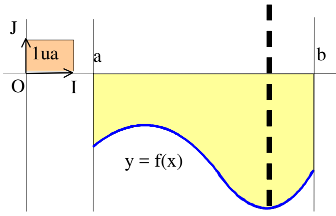
APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL

I CALCUL D'AIRES ET DE VOLUMES

1° Aires

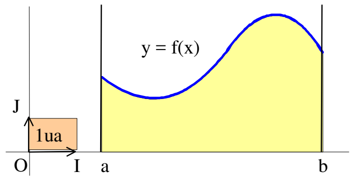
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
L'unité d'aire sera OI × OJ, aire du rectangle ayant pour côtés les segments [OI] et [OJ] .



a) Fonction positive : Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle [a, b] et (E) l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que

$$a \le x \le b \text{ et } 0 \le y \le f(x)$$

alors $\mathscr{A}$**(E) =** $\int_a^b f(x)\,dx$

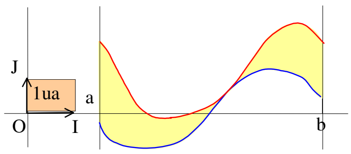


b) Fonction négative : Soit f une fonction continue et négative sur l'intervalle [a, b] et (E) l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $a \le x \le b$ et $f(x) \le y \le 0$

alors $\mathscr{A}$**(E) =** $-\int_a^b f(x)\,dx$

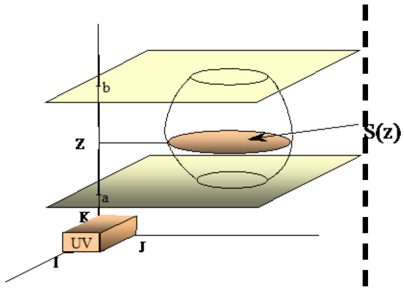
c) Entre deux courbes : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [a, b] vérifiant
$f(x) \le g(x)$ pour tout x de[a, b] et E l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $a \le x \le b$ et $f(x) \le y \le g(x)$

alors $\mathscr{A}(E) = -\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.



2° Volumes

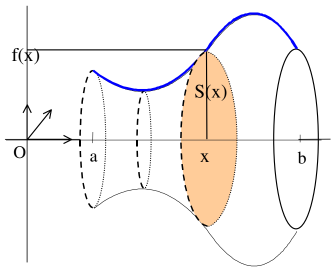
L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.
L'unité de volume sera OI × OJ × OK, volume du parallélépipède ayant pour côtés les segments [OI], [OJ] et [OK] .



a) Solide : On suppose que la section du solide D de l'espace par un plan $\mathscr{P}$ parallèle à xOy de cote z a une aire S(z) connue qui soit une fonction continue de z alors le volume du solide D compris entre les plans de cotes respectives a et b est

$$\boxed{\mathscr{V}(D) = \int_a^b S(z)\,dz}$$

Remarque : On obtient des résultats analogues avec des plans parallèles à yOz ou parallèles à xOy.



b) Solide de révolution :
Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses d'un domaine limité par une courbe y = f(x).
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle [a, b] et (E) l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x$ alors le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par le domaine (E) est $\mathscr{V}(E) = \pi \int_0^b [\,f(x)\,]^2\,dx$

II VALEUR MOYENNE ET VALEUR EFFICACE

a) Définition : La fonction f est continue sur l'intervalle [a, b].

On appelle **valeur moyenne** de f sur l'intervalle [a; b] la quantité : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque : Dans le cas f positive sur [a, b], si on écrit : $\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$ alors μ représente la valeur d'une fonction constante dont l'aire sur l'intervalle [a, b] est la même que celle engendrée par f .

b) Définition : La fonction f est continue sur l'intervalle [a, b]. On appelle **valeur quadratique moyenne** de f sur l'intervalle [ab] la quantité e définie par $e^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [\,f(x)\,]^2\,dx$.

Cette quantité est aussi appelée **Valeur efficace de** f sur [a, b].

III CENTRES D'INERTIES ET MOMENTS D'INERTIE

1° Centre d'inertie (on dit aussi barycentre ou centre de gravité)

a) Rappel : Le barycentre d'un système de points A_1 (m_1); A_2 (m_2); . . . ; A_n (m_n) est déterminé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2 + \ldots m_n}(m_1\,\overrightarrow{OA_1} + m_2\,\overrightarrow{OA_2} + \ldots m_n\,\overrightarrow{OA_n}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OA_i}$

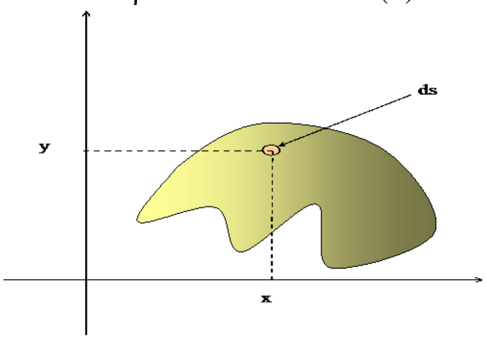
Ses coordonnées sont données par les formules : $X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$; $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$; $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

b) Cas d'une plaque homogène

Dans le cas d'une plaque homogène d'épaisseur uniforme, si on considère un petit élément d'aire ds autour d'un point M(x , y) et si ρ est la densité superficielle, la masse de cet élément est m= ρ ds. Les formules (1) s'écrivent alors : $X = \frac{\sum \rho\,x\,ds}{\sum \rho\,ds}$ = ; $Y = \frac{\sum \rho\,y\,ds}{\sum \rho\,ds}$

En simplifiant on obtient :$X = \frac{\sum x\,ds}{\sum ds}$; $Y = \frac{\sum y\,ds}{\sum ds}$

Le passage au continu donne : $X = \frac{\int x\,ds}{\int ds}$; $Y = \frac{\int y\,ds}{\int ds}$



c) Cas d'une fonction continue et positive

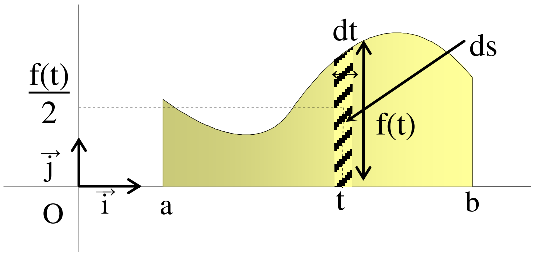
Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle [a; b] et la plaque homogène ensemble des points M(x;y) du plan dont les coordonnées vérifient les relations :

$a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x)$

Les coordonnées X et Y du centre d'inertie G sont données par :

$$\boxed{X = \frac{\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \text{ et } Y = \frac{1}{2}\times\frac{\int_a^b [\,f(x)\,]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}}$$

f(x) dx correspond à ds $\frac{f(x)}{2}$ correspond à y.



II MOMENTS D'INERTIE

a) Rappel : Par rapport à un point O, (ou une droite Δ ou un plan 𝒫) le système de points matériels M_1, M_2, … , M_n de masses respectives m_1 , m_2, … ,m_n et dont les distances au point O (ou à la droite Δ ou au plan 𝒫) sont respectivement d_1, d_2, … , d_n a un moment d'inertie égal à :

$$m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \ldots + m_n d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

b) Cas d'une fonction continue et positive

Une plaque homogène est délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(t)$ et les droites d'équations $t = a$ et $t = b$ et sa densité superficielle ρ est égale à 1.

Le moment d'inertie de cette plaque par rapport à la droite d'équation $t = \lambda$ est donné par $\boxed{M = \int_0^1 (\lambda - t)^2 f(t)dt.}$

$d = |\lambda - t|$ et m correspond à $\rho\, ds = f(t)\, dt$