I. Rappels :

1. ***Définition*** :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0

f est **dérivable** en x_0, s'il existe un réel ℓ tel que .... ou encore ....

ℓ s'appelle **le nombre dérivé** de f en x_0 et il est noté ....

Interprétation graphique :

f est dérivable en $\boldsymbol{x_0}$ si seulement si la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère admet au point $M(\boldsymbol{x_0}, f(x_0))$ ....
....

- T est d'équation : ....
- Un vecteur directeur de T est ....

N.B : $f'(x_0) = 0$ signifie $\mathcal{C}$ admet au point $M(x_0, f(x_0))$ une ....

Application : activité 1 page 40

2. ***Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche*** :

- Activité 4 page 40

Définitions

✓ Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + h[$ $(h > 0)$

f *est* ***dérivable*** à ***droite en*** x_0 *s'il existe un réel* ℓ *tel que* ....

ℓ *s'appelle* ***le nombre dérivé de*** $\boldsymbol{f}$ à ***droite en*** $\boldsymbol{x_0}$ *et il est noté* ....

✓ Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - h, x_0]$ $(h > 0)$

f *est* ***dérivable*** à ***gauche en*** x_0 *s'il existe un réel* ℓ *tel que* ....

ℓ *s'appelle* ***le nombre dérivé de*** $\boldsymbol{f}$ à ***gauche en*** $\boldsymbol{x_0}$ *et il est noté* ....

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0
f *est dérivable en* x_0 *si et seulement si* ....

Interprétation graphique :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan

- ✓ f est dérivable à droite en $\boldsymbol{x_0}$ si seulement si $\mathcal{C}$ admet au point $M(\boldsymbol{x_0}, f(x_0))$ ....

....

- T_d est d'équation : ....

- Un vecteur directeur de T_d est ....

- ✓ f est dérivable à gauche en $\boldsymbol{x_0}$ si seulement si $\mathcal{C}$ admet au point $M(\boldsymbol{x_0}, f(x_0))$ ....

....

- T_g est d'équation : ....

- Un vecteur directeur de T_g est ....

<u>Interprétation graphique dans le cas d'une fonction non dérivable en x_0:</u>

Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 mais $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors $\mathcal{C}$ admet en $M(x_0, f(x_0))$ deux demi tangentes	
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet en $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers	
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet en $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet en $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers	
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet en $M(x_0, f(x_0))$ une demi-tangente verticale dirigée vers	

3. ***Dérivabilité sur un intervalle – Opérations sur les fonctions dérivables*** :

Rappels

Soit a et $b \in \mathbb{R}$ / $a < b$

- Une fonction f est dérivable sur $]a, b[$ ssi ……………………………………………………………
- f est dérivable sur $[a, b[$ ssi ……………………………………………………………
- f est dérivable sur $]a, b]$ ssi ……………………………………………………………
- f est dérivable sur $[a, b]$ ssi ……………………………………………………………

Théorème

- $si\ f\ et\ g\ sont\ deux\ fonctions\ dérivables\ sur\ un\ intervalle\ I\ alors$:
  $f + g\ ;\ \alpha f\ (\alpha \in \mathbb{R}\ ); fg\ et\ f^n\ (n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})\ sont\ dérivables\ sur\ I\ et\ on\ a$:

$(f+g)' =$ ……………………	$(\alpha f)' =$ …………………………	$(fg)' =$ …………………………	$(f^n)' =$ …………………………

- $Si\ de\ plus\ f\ est\ strictement\ positive\ sur\ I\ alors\ \sqrt{f}\ est\ dérivable\ sur\ I\ et\ on\ a$:

$$\boxed{\left(\sqrt{f}\right)' = \ \dots\dots\dots\dots\dots}$$

- $si\ de\ plus\ g\ ne\ s'annule\ pas\ sur\ I\ alors$:
  $\frac{1}{g}\ ;\frac{1}{g^n}\ (n \in \mathbb{N}^*) et\ \frac{f}{g}\ sont\ dérivables\ sur\ I\ et\ on\ a$:

$\left(\frac{1}{g}\right)' =\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$\left(\frac{1}{g^n}\right)' =\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	$\left(\frac{f}{g}\right)' =\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Dérivée de fonctions usuelles

$f(x) =$	$intervalle\ I$	$f'(x) =$
a		
x		
$x^n\ (n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\})$		
$\frac{1}{x}$		
$\frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^*)$		
$\sqrt{x}$		
$\sin(ax + b)$		
$\cos(ax + b)$		
$\tan(ax + b)$		

Rappels

- Toute fonction polynôme est dérivable sur …….
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur ……………………………………………………………

A faire : activité 6 page 42

4. ***Approximation affine d'une fonction*** :

- Activité 3 page 40

Rappels

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a
si f est dérivable en a alors $f(a)+\ f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+f'(a)h\ ,h\ voisin\ de\ 0}$$

Rappels

Si f est dérivable en a alors f est ……………………………………………………….
Attention : si f est continue en a, ……………………………………………………………………………..
mais si f n'est pas continue en a alors …………………………………………………………………………

A faire : exercice 7 page 51

II. Dérivées successives :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.
Si f' *est dérivable sur I, sa fonction dérivée s'appelle ……………………………..…………et est noté ……*
Ainsi $f''=$ …… et *pour tout x de I* : $f''(x)=$ ……….
De même si f'' *est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée ………………………………………..*et est notée ……………………
Plus généralement :
pour tout $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, f est dite ………………………………sur I
$\left(f^{(n-1)}\right)'$ *s'appelle …………………………………………..ou ……………………………………………..et est notée ……*

Application : activité 1 page 42

III. Dérivabilité des fonctions composées :

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(a)$
Si …………………………………………………………………………………………..…..alors $g\circ f$ est dérivable en a
Et on a :

$$\boxed{(g\circ f\ )'(a)=g'(f(a))\times f'(a)}$$

Corollaire

Si $\left(\begin{array}{c}\text{…………………………………………….}\\ \text{…………………………………………….}\\ \text{…………………………………….}\end{array}\right)$ *alors $g\circ f$ est dérivable sur I*

Et *pour tout x de I*, $\boxed{(g\circ f\ )'(x)=g'(f(x))\times f'(x)}$

Application : activité 2 page 43

A faire : exercice 9 page 52

IV. Théorème des accroissements finis :

- Activité 1 page 43

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$ et vérifiant $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que : ....

Interprétation graphique

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Soit A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b Le théorème de Rolle permet d'affirmer qu'il existe au moins un point N de $\mathcal{C}_f$ où la tangente soit ...., donc parallèle à	

Application : activité 2 page 44

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$.

Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que : .... ou encore

....

Interprétation graphique

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ Soit $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ les points de $\mathcal{C}_f$ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ *représente* … … … … … … … . . *de la droite* (AB) $f'(c)$ *représente* … … … … … … … … … … … … … … … … … …. …. Le théorème des accroissements finis permet d'affirmer qu'il existe au moins un point M de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse c où la tangente soit …	

Application : activité 4 page 45

A faire : exercice 11 page 52

V. Inégalité des accroissements finis :

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$.
s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a, b[$; $m \leq f'(x) \leq M$ alors on a :

… . .

Ou encore

… . .

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
S'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq k$ alors on a :
… . .

Application : activité 1 page 45

A faire : exercices 17 et 14 page 52

VI. Variations d'une fonction :

- Activité 1 page 46

Théorème

$Soit\ f\ une\ fonction\ dérivable\ sur\ un\ intervalle\ I\ et\ f'sa\ fonction\ dérivée$

* $Si\ f'est\ strictement\ positive\ sur\ I\ alors$ …

* $Si\ f'est\ strictement\ négative\ sur\ I\ alors$ …

Théorème

$Soit\ f\ une\ fonction\ dérivable\ sur\ un\ intervalle\ I\ et\ f'sa\ fonction\ dérivée$

$Si\ f'est\ positive\ (respectivement\ négative) et\ ne\ s'annule\ sur\ aucun\ intervalle\ ouvert\ de\ I,$
$alors$ … $(respectivement$ … … … … … … … … … … … … … … … … $)$

Théorème

$Soit\ f\ une\ fonction\ continue\ sur\ [a,b] et\ dérivable\ sur\ ]a,b[\ (a<b)$

* $Si\ f\ est\ croissante\ (respectivement\ strictement\ croissante) sur\ ]a,b[\ alors\ f\ est$ … … … … … ..
… …

* $Si\ f\ est\ décroissante\ (respectivement\ strictement\ décroissante) sur\ ]a,b[\ alors\ f\ est$ … … …
… …

Application : activité 3 page 48

VII. Extrema :(Rappels)

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a

* On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, … … … … … … … … … … … … … … ..

* On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe un intervalle J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, … … … … … … … … … … … … … … ..

* Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a, on dit que … ..

Théorèmes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a

1. $Si\ f\ admet\ un\ extrémum\ local\ en\ a\ alors$ … … … … … ….
2. $Si\ f'(x) s'annule\ en\ a\ en\ chageant\ de\ signe\ alors$ … ..

VIII. Point d'inflexion

- Activité 1 page 49

Définition

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Un point I de $\mathcal{C}$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ si ….

Théorème (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant a

Si $f''s'annule\ en\ a, en\ changeant\ de\ signe, alors\ le\ point\ I\big(a,f(a)\big)\ est\ un\ point\ d'inflexionde\ la\ courbe\ représentative\ de\ f$

Application : activité 2 page 49

A faire : exercice 21 page 53 et QCM + Vrai ou Faux page 50