Géométrie dans l'espace

Produit Scalaire

* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

* Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

* Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert \cdot \lVert\vec{v}\rVert \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'.$

$$\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

* $\vec{u}\perp\vec{v}$ ssssi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
* $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}).\ \alpha\in\mathbb{R}$
* $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

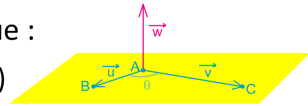
Produit Vectoriel

* Soient $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.

Si non alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ tel que :

a/ $\vec{w}$ est normal au plan (ABC)



b/ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base directe

c/ $\lVert\vec{w}\rVert = \lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{v}\rVert\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\right|$

* $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - zx')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$$

* $\vec{u}\ //\ \vec{v}$ sssi $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
* $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$
* $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
* $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$
* $\vec{w}\wedge(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\wedge\vec{u} + \vec{w}\wedge\vec{v}$

Déterminent

* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$
$= (\vec{w}\wedge\vec{u})\cdot\vec{v}$
$= (\vec{v}\wedge\vec{w})\cdot\vec{u}$

* $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}$

$$= x\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}x' & x''\\ z' & z''\end{vmatrix} + z\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}$$

* $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires sssi $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.
* A, B, C, D sont coplanaires sssi $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$.
* $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ base directe sssi $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 1$.

****

Droites

* La représentation paramétrique de (D) est :

$$D\left(A,\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right) : \begin{cases} x = x_A + \alpha\ a.\\ y = y_A + \alpha\ b.\\ z = z_A + \alpha\ c.\end{cases}\quad (\alpha \text{ paramètre réel}).$$

Plans

* Les équations paramétriques de $P\left(A,\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}\right)$ est $\begin{cases} x = x_A + \alpha\ a + \beta\ a'.\\ y = y_A + \alpha\ b + \beta\ b'.\\ z = z_A + \alpha\ c + \beta\ c'.\end{cases}$ $\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \text{paramètres}\end{matrix}\right)$

* Trois points A, B et C <u>non alignés</u> de l'espace définis le plan (ABC) : $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

* Pour obtenir les équations cartésiennes de (D) on détermine α de l'une des équations paramétriques de (D) et on remplace α dans les deux autres équations paramétriques.	* Une droite $D\left(B , \vec{D}\right)$ et un point A <u>n'appartenant pas</u> à (D) définis le plan $P : \left(A , \overrightarrow{AB} , \vec{D}\right)$. * L'équation cartésienne d'un plan P est de la forme $P : a x + b y + c z + d = 0$. $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P. * Soit P un plan passant par un point A et de vecteur normal $\overrightarrow{N_P}$. L'équation cartésienne de P est alors $P : a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0$. * Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de P alors $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à P. * On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan passant par I = A * B et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

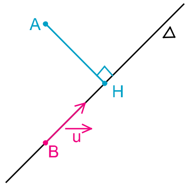
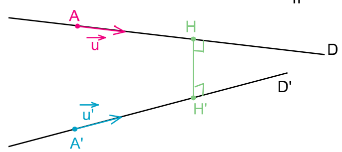
****

Positions relatives de deux droites	Positions relatives d'une droite et d'un plan
* Deux droites de l'espace, (D) et (D') sont ou bien parallèles ou bien sécantes ou bien non coplanaires. * Deux droites (D) et (D') sont non coplanaires sssi $\begin{cases} (D) \text{ et } (D') \text{ non parallèles.} \\ (D) \cap (D') = \Phi. \end{cases}$ ou $\begin{cases} \det(\overrightarrow{AB}, \vec{D}, \vec{D'}) \neq 0 , \\ A \in (D) \text{ et } B \in (D') \end{cases}$	* Une droite (D) et un plan P sont ou bien parallèles ou bien sécantes en un point. * (D) // P sssi $\vec{D} . \overrightarrow{N_P} = 0$. * $(D) \cap P = \{I\}$ sssi $\vec{D} . \overrightarrow{N_P} \neq 0$. * $\left(D\right) \cap P : \begin{cases} (D) : \begin{cases} (1) : x = x_A + \alpha a' \\ (2) : y = y_A + \alpha b' \\ (3) : z = z_A + \alpha c' \end{cases} \\ P : (4) : a x + b y + c z + d = 0 \end{cases}$? On remplace x, y, z dans (4), on détermine α puis on remplace la valeur de α dans (1), (2) et (3) on aura les coordonnées du point d'intersection de (D) et P. * **Rq :** L'orsqu'on remplace x, y et z dans (4), si on trouve : $\begin{cases} 0 . \alpha = 0 \Rightarrow \left(D\right) \text{ est incluse dans P.} \\ 0 . \alpha = (\neq 0) \Rightarrow \left(D\right) \cap P = \Phi. \end{cases}$
Positions relatives de deux plans	
* Deux plans P et Q sont ou bien parallèles ou bien sécants suivant une droite. * P // Q sssi $\overrightarrow{N_P} \wedge \overrightarrow{N_Q} = \vec{0}$. * $P \cap Q = (D)$ sssi $\overrightarrow{N_P} \wedge \overrightarrow{N_Q} \neq \vec{0}$.	

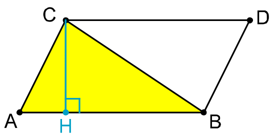
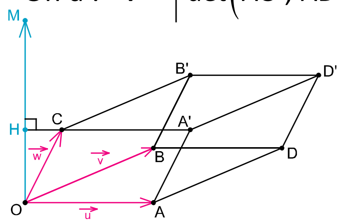
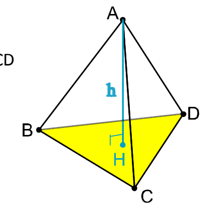
****

Projeté orthogonale d'un point sur une droite	Projeté orthogonale d'un point sur un plan
Soit H le projeté orthogonale d'un point A sur une droite (D). $H(x,y,z) : \begin{cases} H\in(D) = \left(B\,,\,\vec{D}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\right) : \begin{cases}(1): x = x_B + \alpha\, a \\ (2): y = y_B + \alpha\, b \\ (3): z = z_B + \alpha\, c\end{cases} \\ \overrightarrow{AH}\,.\,\vec{D} = 0 \Rightarrow (4): a\,x + b\,y + c\,z + d = 0.\end{cases}$	Soit H le projeté orthogonale d'un point A sur un plan P. $H(x,y,z) : \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \alpha\,\overrightarrow{N_P} \Rightarrow \begin{cases}(1): x = x_A + \alpha\, a \\ (2): y = y_A + \alpha\, b \\ (3): z = z_A + \alpha\, c\end{cases} \\ H\in P \Rightarrow (4): a\,x + b\,y + c\,z + d = 0.\end{cases}$

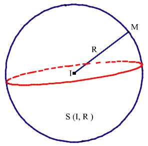
****

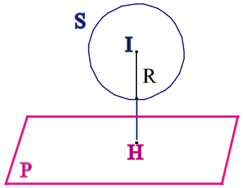
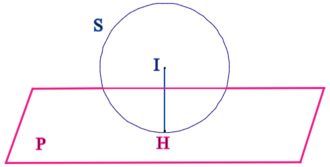
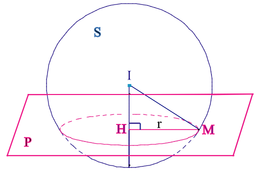
Distance de deux points	Distance d'un point à une droite	Distance d'un point à un plan	Distance de deux droites
$AB = \left\Vert \overrightarrow{AB} \right\Vert$ $= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	$d(A\,,\Delta) = AH = \dfrac{\left\Vert \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} \right\Vert}{\left\Vert \vec{u} \right\Vert}.$  	Soit $P: a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$. On a : $d(A\,,P) = \dfrac{\lvert a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$	$d(D,D') = HH' = \dfrac{\left\lvert \det\left(\vec{u}\,,\vec{u'}\,,\overrightarrow{AA'}\right)\right\rvert}{\left\Vert \vec{u} \wedge \vec{u'} \right\Vert}$ 

****

Aire d'un triangle	Volume d'un parallélépipède	Volume et hauteur d'un tétraèdre
* L'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left\Vert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\Vert$ * L'aire du parallélogramme ABCD est : $\left\Vert \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\Vert$  	Soient ABCDA'B'C'D' un parallélépipède de volume V. On a : $V = \left\lvert \det\left(\overrightarrow{AO}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AA'}\right)\right\rvert$.  	*Soient ABCD un tétraèdre de volume V.* *h étant la hauteur issue du sommet A.* $V = \dfrac{1}{6}\left\lvert \det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}\right)\right\rvert = \dfrac{1}{3}\,.\,h\,.\,\mathcal{A}_{BCD}$ $h = \dfrac{\left\lvert \det\left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BD}\,,\overrightarrow{BA}\right)\right\rvert}{\left\Vert \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \right\Vert} = \dfrac{3\,V}{\text{Aire}(BCD)}.$ 

****

<table>
<tr><th>La Sphère</th><th colspan="3">Positions relatives d’une sphère et d’un plan</th></tr>
<tr><td rowspan="2">* Soient I un point de l’espace et R un réel positif. On appelle sphère de centre I et de rayon R, l’ensemble des points M de l’espace tels que IM=R.


$S_{(I\,,\,R)} = \{ M \in \xi \text{ tq } IM = R \}$
* $S_{[AB]} = \left\{ M \in \xi \text{ tq } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \right\}$. [AB] diamètre.
* $S_{(I\,,\,R)}$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. I(a,b,c)</td><td colspan="3">Soit S une sphère de centre I et de rayon R et P un plan de l’espace.
On désigne par H le projeté orthogonal du point I sur le plan P et on pose d = IH = d(I,P) .</td></tr>
<tr><td>Si d > R alors $P \cap S = \varnothing$.
P et S sont disjoints.

</td><td>Si d = R alors $P \cap S = \{H\}$.
P et S sont tangents en H.

</td><td>Si d < R alors $P \cap S$ est le cercle $\mathscr{C}$ de P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

</td></tr>
</table>

****