Proposé par :Oueslati Aymen
Télephone:27677722



Rappel de cours ☺

Définition ☺

La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien, notée exp.

Conséquences ☺

1°) La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \quad y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{Log} y$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$

3°) La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a: $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$

$\exp(x) > \exp(y) \Leftrightarrow x > y$

**Notation:** $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

Propriétés ☺

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ | $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ | $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ | $e^{ra} = (e^a)^r$ |

## Limites

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

**Dérivée:** La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $(\exp)'(x) = e^x$

***Théorème***

> Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I.
> La fonction $x \longmapsto e^{U(x)}$ est dérivable sur I et a pour fonction dérivée la fonction: $x \longmapsto U'(x) \cdot e^{U(x)}$.

## Primitive

***Théorème***

> Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I.
> Les primitives de la fonction $x \longmapsto U'(x) \cdot e^{U(x)}$ sont les fonctions définies sur I par: $x \longmapsto e^{U(x)} + c$; $c \in \mathbb{R}$.

## Exercices 1 ☺

Calculer, les limites des fonctions suivantes si elles existent:

* $f(x) = e^x - x$ en $+\infty$ ;
* $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{x}$ en $+\infty$
* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ en $+\infty$
* $f(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$ en $+\infty$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
* $f(x) = \dfrac{\operatorname{Log}(e^x + 2e^{-x})}{x}$ en $+\infty$
* $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{x}$ en $+\infty$
* $f(x) = x - \operatorname{Log}(e^x - 1)$ en $+\infty$

## Exercice 2 ☺ www.facebook.com/MathTewa

1°) Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f est paire.

c) Construire $C_f$ dans un repère orthonormé.

2°) Soit l'application $g: \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto \operatorname{Log}(\operatorname{tg} x)$

a) Montrer que g est bijective.

b) Soit h l'application réciproque de g. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée h' est égale à f.

## Solution

### Exercice 1 ☺

•) $x > 0 \quad f(x) = e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} =$

•) $x > 0 \quad f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{x} = \dfrac{e^{2x+1}}{2x+1} \times \dfrac{2x+1}{x} \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{2x+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

•) $x > 0 \quad f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{e^x}{e^{\operatorname{Log}x^2}} = e^x e^{-\operatorname{Log}x^2} = e^{x - \operatorname{Log}x^2} = e^{x\left(1 - \frac{2\operatorname{Log}x}{x}\right)}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log}x}{x} = 0$

•) $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ ;

$$f(x) = \frac{e^x}{x^n} = \frac{e^x}{e^{\mathrm{Log}x^n}} = e^x e^{-\mathrm{Log}x^n} = e^{x-n\mathrm{Log}x} = e^{x\left(1-n\frac{\mathrm{Log}x}{x}\right)}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}x}{x} = 0$

•) $x > 0 \quad f(x) = \frac{\mathrm{Log}(e^x + 2e^{-x})}{x} = \frac{\mathrm{Log}e^x(1+2e^{-2x})}{x} = 1 + \frac{\mathrm{Log}(1+2e^{-2x})}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}(e^x + 2e^{-x})}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\mathrm{Log}(1+e^{-2x})}{x} + 1\right] = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Log}(1+e^{-2x})}{x} =$

•) $x > 0 \quad f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^x}{x}(e^x - 1) \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

•) $x > 0 \quad f(x) = x - \mathrm{Log}(e^x - 1) = x - \mathrm{Log}e^x(1-e^{-x}) = x - x - \mathrm{Log}(1-e^{-x})$

$f(x) = -\mathrm{Log}(1-e^{-x})$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\mathrm{Log}(1-e^{-x})\right] = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

•) $x \neq 0 \quad f(x) = \frac{e^{2x}-1}{3x} = \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{2}{3}$. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim\limits_{X\to0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

d'où $\quad \lim\limits_{x\to0} f(x) = \frac{2}{3}$

## Exercice 2 😊

1°) Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $\quad x \longmapsto \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^{2x} \neq 0$; d'où $D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x}.e^x}{(1+e^{2x})^2}$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-e^{2x})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (1+e^{2x}) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+e^x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} = 0$

*Tableau de variation de f:*

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

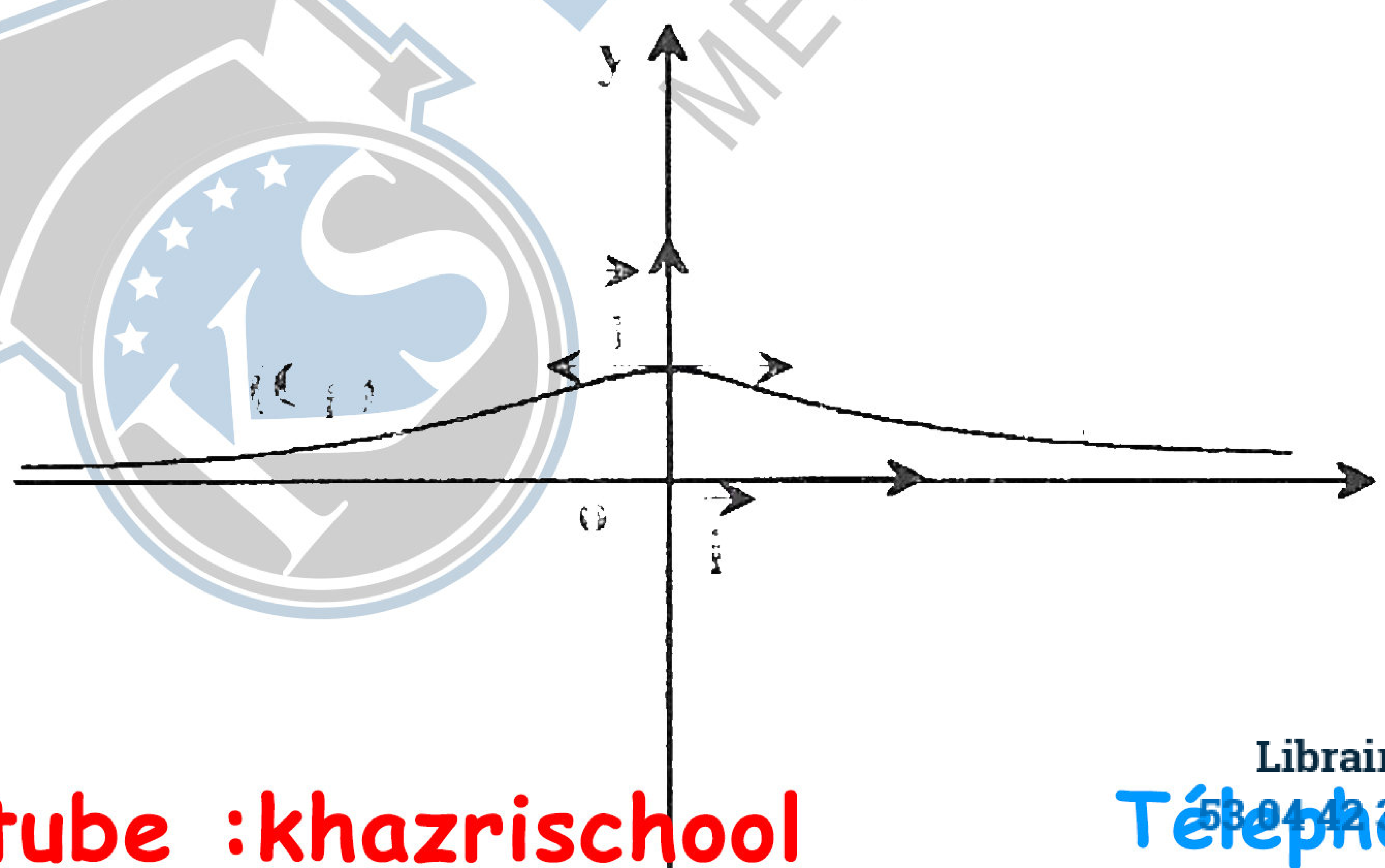
b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+e^x)} = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{1}{e^{-x}+e^x} = f(x)$

ce qui prouve que f est paire.

c) Construction de $C_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droie d'équation $y = 0$ est une asymptote à $C_f$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. L'axe (y'y) est un axe de symétrie pour $C_f$.



3°) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systémes suivants:

- $\begin{cases} e^x \cdot e^{x^2} = 2 \\ x = \text{Log} y \end{cases}$
- $\begin{cases} e^x \cdot e^y = 8 \\ e^{x-y} = 9 \end{cases}$
- $\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$
- $\begin{cases} e^x \cdot e^{2y} = e^4 \\ xy = 2 \end{cases}$