Prof:Oueslati Aymen logarithme népérien BAC AS / 2017-2018

« Rappel de cours + deux exercices corrigés ☺ »

Tél 27677722 Facebook : //www.facebook.com/MathTewa

Définition ☺

La fonction Logarithme Népérien est définie sur $]0,+\infty[$ et sur cet intervalle, elle est la primitive, qui prend la valeur 0 au point 1, de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Conséquences ☺

- Log est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, $(\text{Log})'(x) = \frac{1}{x}$
- $\text{Log}\,1 = 0$
- Log est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a:

  $\text{Log}x = \text{Log}y \iff x = y$

  $\text{Log}x > \text{Log}y \iff x > y$

  $\text{Log}x > 0 \iff x > 1$

  $\text{Log}x < 0 \iff 0 < x < 1.$

Théorème ☺

Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall\, x \in I,\ U(x) > 0.$

La fonction: $x \longmapsto \text{Log}\,U(x)$ est dérivable sur I et a pour fonction dérivée la fonction: $x \longmapsto \frac{U'(x)}{U(x)}$

Propriétés ☺

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \forall r \in \mathbb{Q}\ , \forall n \in \mathbb{N}^*$

1°) $\text{Log}(ab) = \text{Log}a + \text{Log}b$

2°) $\text{Log}(\frac{1}{b}) = -\text{Log}b$ $\qquad$ $\text{Log}(\frac{a}{b}) = \text{Log}a - \text{Log}b$

3°) $\text{Log}(a^r) = r \cdot \text{Log}a$ $\qquad$ $\text{Log}\sqrt{a} = \frac{1}{2}\text{Log}a$ $\qquad$ $\text{Log}\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\text{Log}a$

Limites ☺

$\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \text{Log}x = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x\text{Log}x = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\text{Log}x}{x-1} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{Log}(x+1)}{x} = 1$

Propriété ☺

La fonction Log est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque ☺ Log e = 1 avec e=2,71828

Signe de $a\text{Log}x + b$: $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$

1er cas: $a > 0$				
x	0		$e^{-\frac{b}{a}}$	$+\infty$
$a\text{Log}x + b$	‖	$-$	0	$+$

2ème cas $a < 0$				
x	0		$e^{-\frac{b}{a}}$	$+\infty$
$a\text{Log}\,x + b$	‖	$+$	0	$-$

Théorème

> Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I$, $U(x) \neq 0$.
> La fonction: $x \longmapsto \text{Log}\,|U(x)|$ est dérivable sur I et a pour fonction dérivée la fonction $x \longmapsto \dfrac{U'(x)}{U(x)}$

Théorème

> Soit U une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $\forall x \in I$, $U(x) \neq 0$.
> Les primitives sur I de la fonction: $x \longmapsto \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ sont les fonctions définies sur I par: $x \longmapsto \text{Log}\,|U(x)| + c, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 ☺

Résoudre dans IR les inéquations suivants ☺

$\text{Log}(x+1) < \text{Log}(x^2-1)$

$\text{Log}(2-x) < 0$

$\text{Log}(3x^2-x) \leq \text{Log}\,x + \text{Log}\,2$

Exercice 2 ☺

1)

Etudier les variations de l'application g: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$

2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{Log} x < x$

On considère l'application f: $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x^2 + \operatorname{Log} x}{x}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les variations de f.

b) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 2x$.

c) Déterminer le point de (C) où la tangente est parallèle à (D).

d) Construire la courbe (C).

3°) Déterminer la primitive sur $]0 . +\infty[$ qui s'annule en 1 ; de la fonction f ☺

SOLUTION

Exercice 1 ☺

(I): $\operatorname{Log}(x+1) < \operatorname{Log}(x^2 - 1)$

Soit D l'ensemble des réels x pour lesquels l'inéquation (I) est définie.

$$x \in D \iff \begin{cases} x+1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \iff x > 1$$

d'où $D =]1, +\infty[$.

Pour tout x de D on a:

$$(I) \Leftrightarrow x+1 < x^2-1$$
$$\Leftrightarrow (x+1)-(x-1)(x+1) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)[1-(x-1)] < 0$$
$$\Leftrightarrow (2-x)(x+1) < 0$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$(2-x)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} = (]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[) \cap]1,+\infty[=]2,+\infty[$

(I): $\text{Log}(2-x) < 0$

Soit D l'ensemble des réels x sur lesquels l'inéquation (I) est définie.

$x \in D \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

d'où $D =]-\infty,2[$.

Pour tout x de D on a: (I) $\Leftrightarrow 2-x < 1$

$\Leftrightarrow -x < -1$

$\Leftrightarrow x > 1$

d'où $S_{\mathbb{R}} =]1,+\infty[\cap]-\infty,2[=]1,2[$

(I): $\text{Log}(3x^2-x) \leq \text{Log}\,x + \text{Log}\,2$

Soit D l'ensemble des réels x pour lesquels l'inéquation (I) est définie.

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-1)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-1>0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

d'où $D =]\frac{1}{3},+\infty[$

Pour tout x de D on a: (I) $\Leftrightarrow \text{Log}(3x^2-x) \leq \text{Log}\,2x$

$\Leftrightarrow 3x^2-x \leq 2x$

$\Leftrightarrow 3x^2-3x \leq 0$

$\Leftrightarrow 3x(x-1) \leq 0$

$\Leftrightarrow x-1 \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 1$

d'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty,1[\cap]\frac{1}{3},+\infty[=]\frac{1}{3},1[$

Exercice 2

1°) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \operatorname{Log} x}{x^2} = \frac{1-\operatorname{Log} x}{x^2}$$

Tableau de variation de g:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Le tableau de variation de g prouve que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ g(x) \leq \frac{1}{e} < 1$

d'où $\frac{\operatorname{Log} x}{x} < 1$ c'est à dire $\operatorname{Log} x < x$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$

2°) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = 2x + \frac{\operatorname{Log} x}{x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 2 + \frac{1-\operatorname{Log} x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \operatorname{Log} x}{x^2}$$

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ $\operatorname{Log} x < x \iff -\operatorname{Log} x > -x$

$\iff 2x^2 + 1 - \operatorname{Log} x > 2x^2 - x + 1$

Le trinôme $2x^2 - x + 1$ est strictement positif pour tout réel x d'où
$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad 2x^2 + 1 - \operatorname{Log} x > 0$ ce qui donne $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) > 0$.

Tableau de variation de f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) - 2x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - 2x$	‖	$-$	0	$+$	
Position relative de (C) et D	‖	(C) est au dessous de D		(C) est au dessus de D	

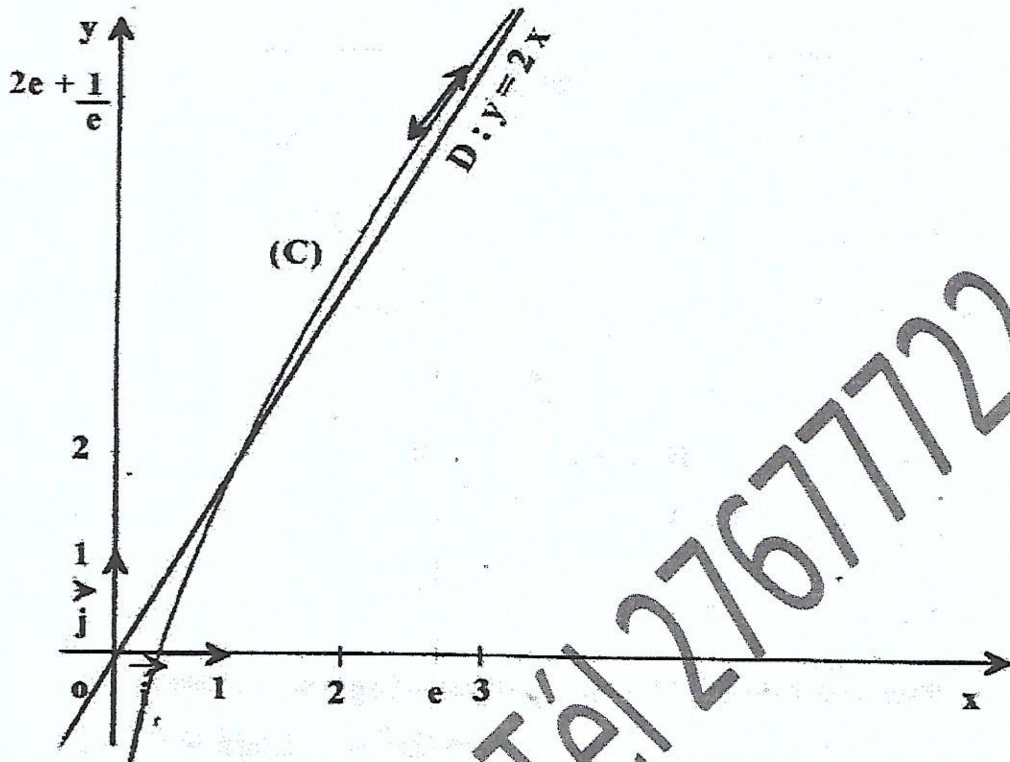
c) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse x.

$(T) /\!/ D \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \operatorname{Log} x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Log} x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Il existe alors une seule tangente à la courbe (C) parallèle à la droite D d'équation $y = 2x$ au point $E\left(e, 2e + \dfrac{1}{e}\right)$.

d) La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (C).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$ ce qui prouve que la droite D: $y = 2x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.


y
2e + $\frac{1}{e}$
D : y = 2x
(C)
2
1
$\vec{j}$
o
$\vec{i}$
1
2
e
3
x