Résumé : Limites et continuité

I] Limites :

1. Opérations sur les limites :

Les résultats résumés dans les tableaux ci-dessous concernent les opérations sur les limites des fonctions en un réel a, à droite en a, à gauche en a ou à l'infini.
Soit ℓ et ℓ' deux réels.

a. Limite d'une somme :

lim(f)	lim(g)	lim(f + g)
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	F.I

b. Limite d'un produit :

lim(f)	lim(g)	$\lim(f\times g)$
ℓ	ℓ'	$\ell\,\ell'$
$\ell\neq 0$	∞	(RS)∞
∞	∞	(RS)∞
0	∞	F.I

c. Limite d'un quotient :

lim(f)	lim(g)	$\lim(\frac{f}{g})$
ℓ	$\ell'\neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	∞	0
∞	ℓ'	(RS)∞
$\ell\neq 0$	0	(RS)∞
0	0	F.I
∞	∞	F.I

Théorème :

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré

2. Limites des fonctions trigonométriques :

Théorème :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$ $(a\in \mathbb{R}^*)$ et en particulier $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

3. Branches infinies :

Définitions :

*) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Si $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ est infinie ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ est infinie ou $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ est infinie alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote « verticale » à la courbe C_f.

*) Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$, $L\in\mathbb{R}$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$) alors la droite d'équation $y=L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$(resp. au voisinage de $-\infty$).
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$) alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$(resp. au voisinage de $-\infty$).

Théorème :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ est infinie, alors pour déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$, on peut procéder de la manière suivante : on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ est infinie alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$, $a\in\mathbb{R}^*$ alors on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ et :

*) Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$, $b\in\mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

*) Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (on dit aussi que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$).

N.B : On procède d'une manière analogue pour déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

4. Limite et ordre :

Théorème :

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut-être en un réel a de I.
Soient ℓ et ℓ' deux réels.
- Si $u(x)\le v(x)$, $\forall\ x\in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a}u=\ell$ et $\lim\limits_{a}v=\ell'$ alors $\ell\le\ell'$.

*) Si $u(x)\le f(x)\le v(x)$, $\forall\ x\in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a}u=\lim\limits_{a}v=\ell$ alors $\lim\limits_{a}f=\ell$.

*) Si $|f(x)-\ell|\le u(x)$, $\forall\ x\in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a}u=0$ alors $\lim\limits_{a}f=\ell$.

*) Si $u(x)\le f(x)$, $\forall\ x\in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a}u=+\infty$ alors $\lim\limits_{a}f=+\infty$.

*) Si $f(x)\le u(x)$, $\forall\ x\in I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{a}u=-\infty$ alors $\lim\limits_{a}f=-\infty$.

N.B : Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à gauche en a, à droite en a ou à l'infini.

Remarque :

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ n'admettent pas de limite à l'infini.

5. Limite d'une fonction composée :

Définition :

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J telle que $u(I) \subset J$.
La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$, est appelée fonction composée de u et v.

Théorème :

Soient u et v des fonctions et a, b et c finis ou infinis.
Si $\lim_{a} u = b$ et $\lim_{b} v = c$ alors $\lim_{a} v \circ u = c$.

II] Continuité :

1. Continuité en un réel :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est continue en a alors les fonctions αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), $|f|$ et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue en a.
- Si f et g sont continue en a alors les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f et g sont continue en a et $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est continue en a et f est positive sur I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Théorème :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont continues en tout réel.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue en tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- La fonction $x \mapsto \cot x$ est continue en tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Théorème :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a + h[$ ($h \in \mathbb{R}_+^*$).
  f est continue à droite en a ssi $\lim_{a^+} f = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a - h, a]$ ($h \in \mathbb{R}_+^*$).
  f est continue à gauche en a ssi $\lim_{a^-} f = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
  f est continue en a ssi $\lim_{a^-} f = \lim_{a^-} f = f(a)$.
  autrement dit : f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a.

2. Prolongement par continuité :

Théorème et définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en un réel a de I.
Lorsque f admet une limite **finie** ℓ en a, on dit que f est prolongeable par continuité en a et la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a.
La fonction g est appelée le prolongement par continuité de f en a.

3. Continuité sur un intervalle :

Définitions :

- Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I.
  On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b].
On dit que f est continue sur [a, b] si elle est continue sur]a, b[, à droite en a et à gauche en b.
- De même on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles : [a, b[,]a, b], $]-\infty$, a] et [a, $+\infty$[.

4. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème : L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle.

Théorème : L'image d'un intervalle **fermé borné** [a, b] par une fonction **continue** f est un intervalle **fermé borné** [m, M].
m est le minimum de f sur [a, b]
Il existe un réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $m = f(\alpha)$.
M est le maximum de f sur [a, b].
Il existe un réel $\beta \in [a, b]$ tel que $M = f(\beta)$.
On dit que f atteint ses bornes en α et β.

Théorème : L'image d'un intervalle par une fonction **continue et strictement monotone** est un intervalle de **même nature**.

5. Continuité d'une fonction composée :

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.
Soit v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel u(a).
Si u est continue en a et v est continue en u(a) alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Conséquence :

La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

III] Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème :

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans [a, b].
En particulier si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans]a, b[.

Théorème :

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans [a, b].

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun réel de I alors f garde un signe constant sur I.