Devoir de contrôle n°1

EXERCICE N°1

A) Soit la fonction f définie sur IR par : f(x) = $1+\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Etudier les variations de f.

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.

2.a) Montrer que l'équation : f(x) = 3x admet dans [-1, + ∞[une unique solution α .

b) Justifier que $\alpha \in]0,1[$.

3) Tracer la courbe (C).

B)

Soit la fonction g définie sur $[-\pi/4, \pi/2]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(tgx) & si \quad x \neq \pi/2 \\ g(\pi/2) = 0 \end{cases}$

1) Vérifier que pour tout x$\in [-\pi/4, \pi/2]$ on a : g(x) = $1+\sqrt{2}\cos(x+\pi/4)$

2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

3) Montrer que g admet une application réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.

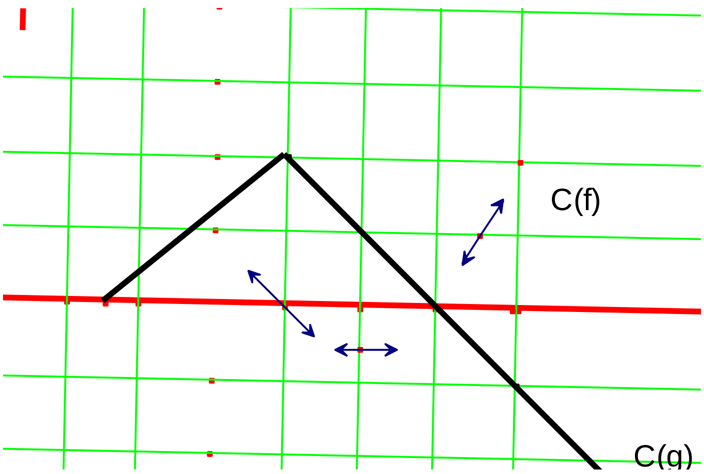
4) Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur l'intervalle I puis calculer $(g^{-1})'(x)$.

5) Tracer, dans le repère contenant la courbe de g, celle de g^{-1}.

EXERCICE N°2

Deux fonctions f et g sont représentées graphiquement ci-dessous :

Montrer que g o f est dérivables aux points d'abscisses 1, 2 et 3 et déterminer les nombres dérivés correspondants.



EXERCICE N°3

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$ on pose $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$, on considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les points A, B, M et M' d'affixes respectives 1 ; (-1) ; z et z'

1) Montrer que $|z'| = 1$ et interpréter géométriquement le résultat.

2) a) Calculer $U = \dfrac{z'-1}{z-1}$ en fonction de z et $\bar{z}$

b) En déduire que U est réel.

c) Montrer alors que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires.

3) a) Montrer que $V = \dfrac{z'+1}{z'-1}$ est imaginaire pur.

b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

EXERCICE N°4

Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. On considère l'équation : (E_θ) : $Z^2 - (2i + e^{i\theta})Z - 1 + ie^{i\theta} = 0$.

1) Résoudre dans C l'équation (E_θ).

2) On pose $Z_1 = i + e^{i\theta}$

a) Prouver que $Z_1 . e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$

b) En déduire la forme exponentielle de Z_1.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $e^{i\theta}$; Z_1 et i.

a) Prouver que OABC est un losange.

b) Montrer que OB.AC = $2\cos\theta$

c) En déduire θ pour que l'aire du losange OABC soit égale à 1/2.

4) Résoudre dans C l'équation $Z^4 - (2i + 1)Z^2 - 1 + i = 0$.

……………………………………………………………………………………………...

EXERCICE (supplémentaire)

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $]1, +\infty[$

c) Vérifier que $1,44 < \alpha < 2$

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 est équivalente à (E) : $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$; pour x > 1

4) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$

b) Montrer que g est bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.