Lycée sec .Ibn khaldoun
A/S 2009- 2010

DEVOIR DE CONTROLE N°1
de mathématique

Classe : 4$^{ième}$ science
Durée : 2h
Prof : Cheheibi Adel

## EXERCICE N°1 : (3 points)

Cocher la réponse exacte.

1/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+4}-2}$ est égale à :

**a)** 0 **b)** 1 **c)** 2

2/ Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $|u_n|$ est convergente vers un réel L alors :

**a)** $(u_n)$ converge vers L **b)** $(u_n)$ est bornée **c)** $(u_n)$ converge vers L ou - L

3) $(1 + i)$ est une solution de l'équation $z^2 - (2i+1)z + i - 1 = 0$ alors l'autre solution est :

**a)** i **b)**- i **c)** 1 - i

## EXERCICE N°2: (5 points)

On considère les deux suites réelles $(U_n)$ et $(V_n)$ définies sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n \cdot V_n}{U_n + V_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 8 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \in$ IN on a $U_n > 0$ ,$V_n > 0$ et $U_n < V_n$

2) Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante et que $(V_n)$ est décroissante sur IN

3) Montrer que pour tout n de IN on a : $V_n - U_n < \frac{1}{2}(V_{n-1} - U_{n-1})$

indication $(U_n > U_{n-1})$

Et déduire que $V_n - U_n \leq 6\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n dans IN

4)a) Déduire que $(V_n - U_n)$ converge vers 0

b) Que peut on dire des deux suites $(U_n)$ et $(V_n)$ **?**

5)a) Montrer que la suite $(U_n . V_n)$ est constante

b) Déduire que $(U_n)$ et $(V_n)$ convergent vers la même limite que l'on donnera

***<u>EXERCICE N°3</u> : (6 points)***

Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par (E) : $z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$ avec a désigne un nombre complexe **non nul.**

1/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note $z_1$ et $z_2$ les solutions de (E).

b) Montrer que $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow a \in IR^*$

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne les quatre points A, B, M et N d'affixes respectives **1**, **-1 + 2i**, **i + a** et **i – a**

a) Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.

b) Lorsque M $\notin$ (AB), donner la nature du quadrilatère AMBN.

3/ On suppose que $a = e^{i\theta} - 2i$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$

a) Montrer que M décrit un cercle fixe $(C)$ que l'on précisera lorsque $\theta$ décrit $[0, 2\pi]$

b) En déduire l'ensemble $(C')$ des points N lorsque $\theta$ décrit $[0, 2\pi]$.

***<u>EXERCICE N°4</u> : (6 points)***

On considère la fonction f définie sur I = [-1, 1] par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $\xi_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Montrer que f est continue et dérivable en 0.

2/ Montrer que f est impaire.

3/a) Vérifier que pour tout $x \in ]0, 1[$, on à : $\dfrac{f(x) - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} - 1\right)$.

b) En déduire que f n'est pas dérivable ni à gauche en 1 ni à droite en – 1.
Interpréter géométriquement le résultat

4/a) Montrer que pour tout $x \in ]0, 1[$, on à : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Construire $\xi_f$ et sa tangente au point 0

5/ a) Montrer que f réalise une bijection de I sur I. Soit $f^{-1}$ sa réciproque.

b) Construire la courbe de $f^{-1}$ dans le même repère.

c) Montrer que pour tout x de I on à : $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$