

<i>Mathématiques</i>	Devoir De Synthèse N° 1	<i>Lycée secondaire : Rue Fattouma</i>
<i>4^{ème} Sc-Exp 4</i>		<i>Bourguiba Monastir</i>
<i>Mr : Abbes</i>		<i>08 / 12 / 2010 , 2^h</i>

❖ Exercice N°1 : (3 points)

Pour chaque question, une seule des 3 propositions est exacte. Laquelle ?

- Sachant que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation : $z^2 - 2 \cos\theta z + 1 = 0$, alors l'autre solution est :
 - $i \cos\theta$
 - $i e^{i\theta}$
 - $e^{-i\theta}$.
- Sachant que $\theta \in]\pi/2, 3\pi/2[$, alors un argument de $z = i \cos\theta$ est :
 - $\frac{\pi}{2}$
 - $-\frac{\pi}{2}$
 - $\frac{\pi}{2} + \theta$.
- Soit Z un nombre complexe non nul . Si α est une racine carrée de Z alors l'autre racine de Z est
 - $-\alpha$
 - $i\alpha$
 - $\overline{\alpha}$.

❖ Exercice N°2 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- Donner le module et un argument de $-2 + 2i\sqrt{3}$;
 - Donner sous forme exponentielle les racines quatrièmes de $-2 + 2i\sqrt{3}$.
- On considère dans \hat{E} , l'équation (E) : $z^2 - (-1 + 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.
 - Sans calculer les solutions z' et z'' de (E), montrer que $|z'.z''| = 4$ et $\arg(z'.z'') \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
 - Donner la forme cartésienne de $(3 - 2i\sqrt{3})^2$.
 - Résoudre alors l'équation (E).
- On note A le point d'affixe 1, B le point $-2 + 2i\sqrt{3}$ et C le point d'affixe z_c où z_c est le nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$ et de partie réelle $\frac{5}{2}$.
 - Déterminer le module de z_c puis écrire z_c sous la forme cartésienne.
 - Evaluer $\frac{AB}{AC}$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. En déduire la nature du triangle ABC.

❖ Exercice N°3 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur \hat{E} par $f(x) = 1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

- Montrer que f est dérivable sur \hat{E} et que pour tout $x \in \hat{E}$, $f'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2+1})^3}$.
 - Dresser le tableau de variation de f .
 - Tracer la courbe ζ_f de f dans un repère orthonormé. (unité graphique 2 cm)
- Montrer que f réalise une bijection de \hat{E} sur un intervalle J que l'on précisera.
 - Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
 - Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} dans le même repère que ζ_f .
- Montrer que pour tout $x \in \hat{E}$, $|f'(x)| \hat{A} \frac{1}{2}$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [\sqrt{3}, 2]$.

5) On définit la suite réelle (u_n) définie sur \hat{E} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

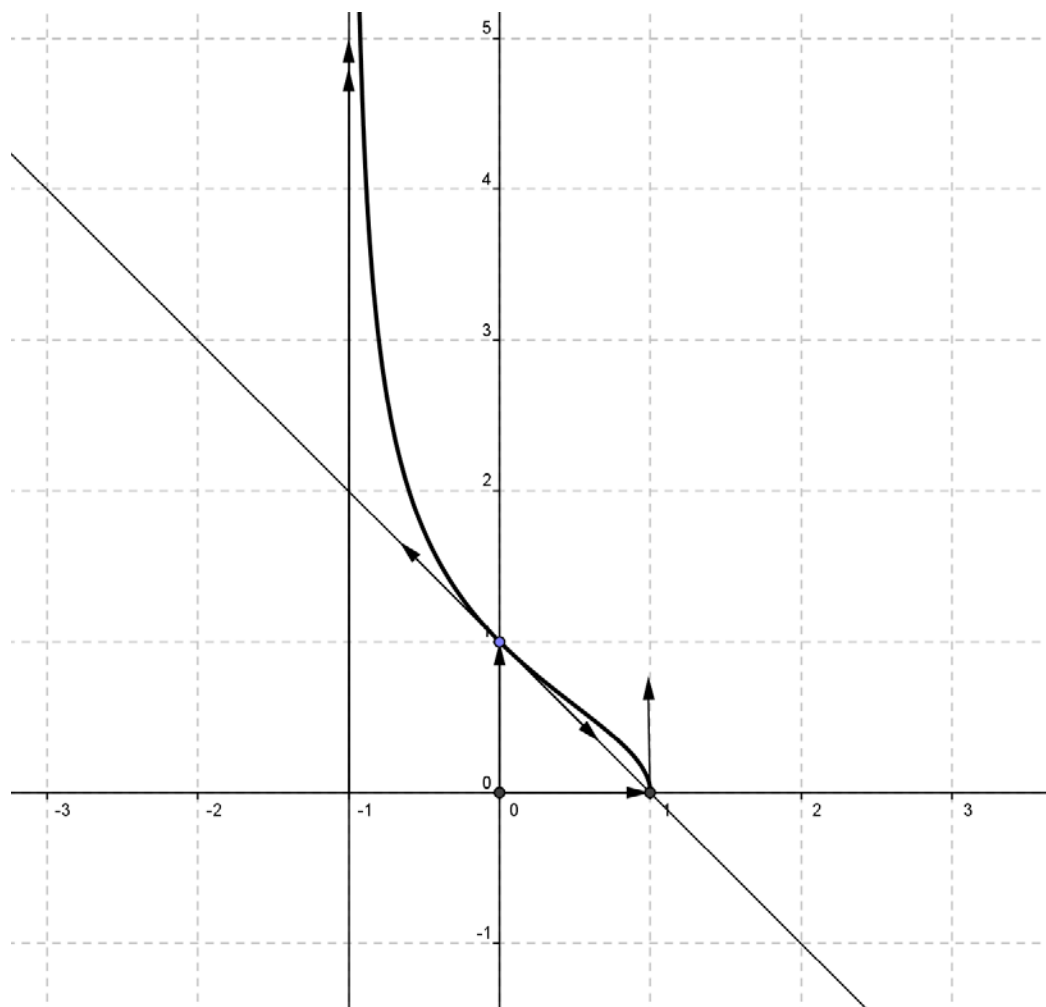
a) Montrer que pour tout $n \in \hat{E}$, $|u_{n+1} - \alpha| \hat{A} \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout $n \in \hat{E}$, $|u_n - \alpha| \hat{A} \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - \alpha|$.

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

❖ Exercice N° 4 : (4 points)

La figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur $] -1, 1[$. Sur cette courbe on a indiqué la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0, la demi-tangente au point d'abscisse 1 et l'asymptote verticale.



En utilisant le graphique :

1) Donner $f(0)$, $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1}$.

2) Dresser le tableau de variation de f .

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$

4) On donne pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. Soit g la fonction définie sur $]0, \pi[$ par

$g(x) = f(\cos x)$. Montrer que g est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $g'(x)$.