Devoir de contrôle n° 1 4iéme sc Lycée Avenue FB Monastir	Mathématiques : novembre 2009 ELHOUICHET HAFEDH

Exercice N°1 (3 points)(Voir page 2)

Exercice N°2:(4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, Soit le nombre complexe $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

1) Déterminer la forme trigonométrique de z_0 ;

2) Verifier que : $z_0^4+\overline{z_0}^4=-32$

3)a) Soit a = $(\sqrt{3}-1)+i(1+\sqrt{3})$.Vérifier que a $=\sqrt{2}.\,z_0\,.e^{\frac{i\pi}{6}}$ et déterminer alors sa forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice N°3: (7 points)

1)Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

a) Résoudre dans C l'équation :$z^2-2z+4=0$.

b) Exprimer les solution z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2)On donne dans P les points A , B et C d'affixes respectives $1+i\sqrt{3}$,2 et $1-i\sqrt{3}$
Montrer que le quadrilatère OABC est un losange

4) a) Soit z un nombre complexe distinct de 1 et $\theta\neq 2k\pi$ tel que $\frac{z+1}{z-1}=e^{i\theta}$

Montrer que $z=\frac{-i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$

b)En déduire dans C les solutions de l'équation : (E') : $(\frac{2z+2}{z-1})^2-2\,\frac{2z+2}{z-1}()+4=0$

Exercice N°4 : (6 points)

Siot la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\dfrac{x^2\sin(\frac{2}{x})}{1+x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1)a)Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|f(x)| \leq x^2$.

b)En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2)Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpreter chaque fois le résultat obtenu.

3)Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x) = f(-\sqrt{x+1})$.

a)Montrer que h est continue sur $]-1,+\infty[$.

b)Montrer que l'équation $h(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom :………………………. **Prénom :……………………**	**Classe :……..** **N°:…….**

I- Cocher l'unique réponse exacte dans chacun des cas suivants :

1)Si f est une fonction continue sur l'intervalle [-2,4] tels que $f(-2) = 2$ et $f(4) = -1$ Alors l'équation : $f(x) = 1$

☐ admet une unique solution dans [-2,4] ☐ admet au moins une solution dans [-2,4] ☐ n' admet pas de solution dans [-2,4]

2)Soit z = $\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$ $(\theta \in \mathbb{R})$,alors :

☐ z = $\cos(2\theta)$ ☐ z = 1 ☐ z = $\sin(2\theta)$

3) Si f est une fonction croissante continue et ne s'annule pas sur un intervalle [a,+ ∞[avec a est un réel,alors :

☐ $\frac{1}{f}$ est croissante sur [a,+ ∞[☐ $\frac{1}{f}$ est décroissante sur [a,+ ∞[☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

II- Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Si *z est* un nombre complexe d'argument $\frac{p}{3}$ alors z^{2010} est un nombre réel. ☐

2) l'ensemble des points *M* d'affixe *z* différent de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$

est une droite parallèle à l'axe des réels . ☐

3) On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{p}{5}\right)z + 1 = 0$.

L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 . ☐