

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<u>Devoir de contrôle n° 1</u> Mathématiques	Classe : 4 ^{ème} Sc exp ₁
Date : 14 / 10 / 2009	Prof : MEDDEB Tarak	Durée : 2 heures

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (7 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On désigne par A le point d'affixe $z_A = 1$ et par \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 1.

1) Soit $\theta \in]0, \pi[$. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(E_\theta): z^2 - (2 + e^{i\theta})z + 1 + e^{i\theta} = 0.$$

2) Soit B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\theta}$ et E le point d'affixe $z_E = 1 + z_B^2$.

a/ Montrer que B appartient au cercle \mathcal{C} .

b/ Montrer que : $z_B = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}}$.

c/ En déduire que : $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel. Interpréter géométriquement le résultat.

3) Dans la suite de l'exercice, on pose $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a/ Donner la forme algébrique de z_B .

b/ Construire les points B et E .

Exercice n°2 : (7 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{2+U_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$.

1) a/ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $1 \leq U_n < 2$.

b/ Montrer que la suite U est croissante.

c/ En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2) On pose, pour tout $n \in IN$, $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$.

a/ Montrer que V est une suite géométrique.

b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

3) a/ Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |U_n - 2|$.

b/ En déduire que, $|U_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c/ Retrouver la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+4}-2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b/ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

En déduire: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) On pose, pour $x > 0$, $g(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

a/ Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

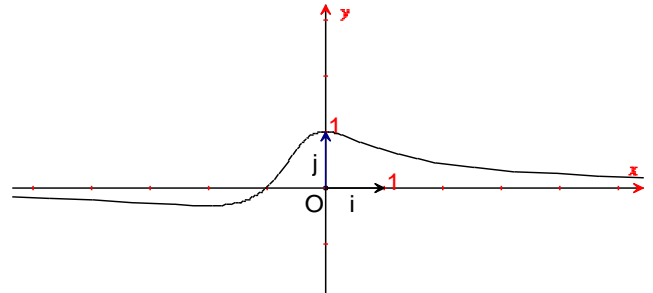
b/ En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

c/ La fonction f est-elle continue en 0 ?

3) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction h continue sur \mathbb{R}

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(f(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(h(x)) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(f(x)).$$



Bonne chance

