L.S.Dar lamen
Mr :Nebti Khaled
Classe :4Sc.Exp1

Devoir de contrôle N°1
Durée :2h
AS :09/10

EXERCICE N°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée

1°) Soient $x \in \mathbb{R}$, $z_1 = -\cos x - i\sin x$ et $z_2 = 1 - i$ et soit $z = z_1.z_2$

a) $\arg(z) = -x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ b) $\arg(z) = 3\frac{\pi}{4} + x + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

c) l'écriture de z sous forme exponentielle est : $z = \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4} - x)}$

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 1 + i| = \left|z - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$ est :

a) Le cercle de centre O et de rayon 1

b) La médiatrice de segment [OB] ou B $(2e^{i\frac{\pi}{3}})$

c) La médiatrice de segment [AB] ou $A(1 - i)$ et $B(2e^{i\frac{\pi}{3}})$

3°) Soit (U_n) une suite définie par : $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ donc la limite de la suite (U_n) est :

a) est égale à 0. b) n'existe pas. c) est égale à (-1.)

EXERCICE N°2 : (5 pts)

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $2z^2 - 2z - i(\sin\theta)e^{i\theta} = 0$.
avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1°) a) Vérifier que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $1 + 2i(\sin\theta)e^{i\theta} = e^{2i\theta}$.

b) Résoudre alors l'équation (E).

c) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et N d'affixes respectives $\frac{1 + e^{i\theta}}{2}$ et $\frac{1 - e^{i\theta}}{2}$.

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Déterminer θ pour que le triangle OMN soit isocèle en O.

EXERCICE N°3 : (5pts)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n

1°) **a.** Montrer que la suite U est majorée par 4.

b. Montrer que la suite U est strictement croissante

c. En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite

2°) **a.** Montrer que , pour tout entier naturel n , on a : $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $4-u_n \leq (0.5)^n 4$

c. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°4 : *(7 pts)*

On donne . $u(x)=4x^5-5x^4-4$ pour tout $x \geq 0$

1°) **a.** Dresser le tableau de variation de u

b. Montrer que l'équation u(x) = 0 admet une seule solution $\alpha \in]1.3;1.5[$

c. En déduire le signe de u(x) pour tout $x \geq 0$

2°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $\begin{cases} f(x)=1+\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+1}-1)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x)=\dfrac{x^5+5x-1}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b. Montrer que f est continue en 0, en déduire le domaine de continuité de f

3°) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ et que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{(x-1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

4°) **a.** Donner le tableau de variation de f

b. Déterminer : $f\langle [0,1[\rangle$, $f\langle]1,+\infty[\rangle$

Exercice n°1 (3points) Devoir Mejri Adel

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,5point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0.

1) Soit z un nombre complexe de module 2. Alors le conjugué $\bar{z}$ de z est égal à

a-/ $\dfrac{\sqrt{2}}{z}$ b-/ $\dfrac{2}{z}$

c-/ $\dfrac{4}{z}$

2) L'équation $z^2 = -4$ admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ exactement

a-/ une solution b-/ deux solutions c-/ quatre solutions

3) un argument du nombre complexe $(1+i)^{2009}$ est

a-/ $\dfrac{\pi}{2}$ b-/ $\dfrac{\pi}{4}$ c-/ $\dfrac{3\pi}{4}$

4) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ sont

a-/ opposées b-/ inverses c-/ ni opposées, ni inverses

5) Si z est un nombre complexe alors le conjugué de $1 + i z^2$ est

a-/ $1 - i z^2$ b-/ $1 - i \bar{z}^2$ c-/ $-1 - i z^2$

6) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le module du nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$ est égal à

a-/ $1 + \left|e^{i\theta}\right|$ b-/ $\sqrt{2}$ c-/ $\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

Exercice n°2(6points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) a-/ Vérifier que $8 - 6i = (3-i)^2$

b-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E): $z^2 + (1+i)z - 2(1-i) = 0$

2) Soit $\theta \in [0,\pi]$.

On considère l'équation : (E_θ) : $z^2 + (1+e^{i\theta})z - 2(1-e^{i\theta}) = 0$.

a-/ Vérifier que (-2) est une solution de l'équation (E_θ).

b-/ En déduire l'autre solution de l'équation (E_θ).

3) Soient A et M_θ les points d'affixes respectives – 2 et $1 - e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$.

a-/ Calculer AM_θ en fonction de θ

b-/ Déterminer la valeur de θ pour laquelle AM_θ est maximale

Exercice n°3(5points)

Soit la fonction f définie sur □ par : $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{1+x}}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ x + \dfrac{1}{2} - \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) a-/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b-/ Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f(x) \geq x - \dfrac{1}{2}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Etudier la continuité de f en 0

3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in]-\dfrac{1}{2}, 0[$

Exercice n°2 (6points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur □ , par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$; $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5}$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n < v_n$

2) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

3) Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

4) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même lmite.

5) Soit la suite (w_n) définie sur ¥ par : $w_n = 9u_n + 5v_n$

a-/ Montrer que (w_n) est une suite constante.

b-/ En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).