Mathématiques	DEVOIR DE CONTROLE N° 1	Lycée secondaire : Rue Fattouma Bourguiba Monastir
$4^{ème}$Sc-Exp_4		
Mr : Abbes		01 / 11 / 2010 , 2^H

➢ **Exercice N°1 :** Pour chaque question, une seule des 3 propositions est exacte. Laquelle ?

1. Lorsque θ varie sur $[0,2\pi[$, $M\left(i - e^{i\theta}\right)$ décrit : a) $\zeta_{(O(0)\,,\,1)}$ b) $\zeta_{(A(i)\,,\,1)}$ c) $\zeta_{(B(-i)\,,\,1)}$
2. Un argument de $-\sqrt{2}\,\dfrac{1+i\sqrt{3}}{3\,i}$ est : a) $-\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{6}$
3. Un argument de $-1-e^{-i\theta}$, $\theta\in[0,\pi[$ est : a) $\pi-\dfrac{\theta}{2}$ b) $\pi+\dfrac{\theta}{2}$ c) $-\dfrac{\theta}{2}$

➢ **Exercice N°2 :**

Le plan complexe est rapporté au repère ON direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A(-2i), B(-i/2), I(i) et J(-i).

f étant l'application qui à tout point M(z) distinct de A, associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{2i\,z-1}{z+2i}$.

1) Déterminer les points invariants de f.

2) a) Montrer que si M ≠ A et M ≠ B on a : $\arg(z') \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\ [2\pi]$.

b) En déduire les ensembles suivants : $E_1 = \left\{ M(z)\ \text{tq}\ z' \in \mathbb{R} \right\}$, $E_2 = \left\{ M(z)\ \text{tq}\ z' \in i\,\mathbb{R}_+^* \right\}$.

3) Montrer que si z ≠ i et z ≠ -i alors $\dfrac{z'+i}{z'-i} = 3\,\dfrac{z+i}{z-i}$.

4) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M tel que $MJ = \dfrac{1}{3}\,MI$.

a) Vérifier que $A \in \mathscr{C}$ puis déterminer et construire $\mathscr{C}$.

b) Montrer que si $M \in \mathscr{C}\backslash\{A\}$ alors M' décrit une droite fixe que l'on déterminera.

➢ **Exercice N°3 :** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)+1 & \text{si } x<0 \\ f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout x < 0 on a : $-x^2+1 \leq f(x) \leq x^2+1$.

b) Montrer que f est continue en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

3) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in\ ]-2\,,-1[$ tel que $f\left(x_0\right) = 0$.

4) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) = -1 + \dfrac{4}{2+\sqrt{x}}$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0\,,+\infty[$. Déterminer alors l'image de $[0\,,+\infty[$ par f.

c) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in\ ]0\,,1[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

➢ **Exercice N°4 :** Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{4\,u_n+3}{u_n+6}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n < 1$.

b) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n-1}$.

a) Montrer que la suite v est géométrique de raison $q = \dfrac{7}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Barème : Ex 1 (3 Points) ; Ex 2 (7 Points) ; Ex 3 (6 Points) ; Ex 4 (4 Points) (Bon Travail)