Devoir de contrôle N°1

EXERCICE N°1 :(4 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i.

L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un réel est :

a. La droite (AB) privée de A.
b. Le segment [AB] privé de A.

c. Le cercle de diamètre [AB] privé de A.

2) Soit z un nombre complexe de module 3 Alors le conjugué de z est :

a. $\dfrac{3}{z}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{z}$ **c.** $\dfrac{9}{z}$

3) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :

a. $|z|+1$ **b.** $\sqrt{z^2+1}$ **c.** $|i\bar{z}+1|$

4) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

EXERCICE N°2 (4 points)

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.

b) Etudier la continuité de f sur□ .

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur □ par $h(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$.

a) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique ꝏ dans □ et que ꝏ⁈$]-\dfrac{1}{2},0[$.

b) Montrer que sur □- ; f(x) = x , h(x) = 0.

c) Déduire que la courbe représentative de f coupe la droite Δ: y= x en un point d'abscisse négatif.

EXERCICE N° 3 (6 points)

Soit (U) la suite réelle définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2-u_n^2}}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que (U) est décroissante ,en déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} u_n$. Endéduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n$.

b) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) Soit (S) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que (S) est majorée et qu'elle est convergente .

EXERCICE N°4 (6 points)

Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ définie par (E) : $z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$ avec a désigne un nombre complexe **non nul**.

1/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E).

b) Montrer que $|z_1| = |z_2|$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}$

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne les quatre points A, B, M et N d'affixes respectives 1, -1 + 2i, i + a et i – a

a) Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera.

b) Lorsque M $\notin$ (AB), donner la nature du quadrilatère AMBN.

3/ On suppose que $a = e^{i\theta} - 2i$ avec $\theta \in 0, 2\pi$

a) Montrer que M décrit un cercle fixe (C) que l'on précisera lorsque θ décrit $0, 2\pi$.

b) En déduire l'ensemble (C') des points N lorsque θ décrit $0, 2\pi$.