

Exercice n°1: (4 points) :

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte. Ecrire le numéro de la question et donner, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie.

I. On donne le nombre complexe $z = -5 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{i} \right)$

1) Le module de z est égal à :

a) $5|\sqrt{3} + i|$; b) $-5 \left| \frac{\sqrt{3} + i}{i} \right|$; c) $5(|\sqrt{3} + i| - |i|)$

2) Un argument de Z est égal à :

a) $-5 \frac{\arg(\sqrt{3} + i)}{\arg(i)}$; b) $\frac{\pi}{2} + \arg(\sqrt{3} + i)$; c) $\arg\left(\frac{\sqrt{3} + i}{i}\right)$

3) Z est égal à :

a) $10e^{i\frac{2\pi}{3}}$; b) $-10e^{i\frac{\pi}{6}}$; c) $5e^{i\frac{\pi}{3}}$

II. On considère trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \leq v_n \leq w_n$ »

1) Si (u_n) et (w_n) sont adjacentes alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$; b) la suite (v_n) est majorée. ; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$; b) la suite (u_n) est minorée. ; c) la suite (w_n) n'a pas de limite.

Exercice n°2: (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, -3i et -i.

Pour tout point M du plan d'affixe z ($z \neq -3i$) on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{iz - 1}{z + 3i}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

3) a) Vérifier que $(z' - i)(z + 3i) = 2$.

b) En déduire que $AM'.BM = 2$ et que $(\vec{u}, \overline{AM'}) + (\vec{u}, \overline{BM}) \equiv 0[2\pi]$.

4) Soit le point E d'affixe $z_E = -3i - 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Calculer BE.

b) Déterminer (\vec{u}, \overline{BE}) .

c) Placer le point E et en déduire une construction du point E' d'affixe z'_E .



Exercice n°3: (5,5 points)

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos \pi x}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $-1 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} - 1$.
c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0 .
- 3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 0]$.
 - a) Dresser le tableau de variation de g sur $[-1, 0]$.
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-1, 0[$.
 - c) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$.
 - d) Donner le signe de $g(x)$ sur $[-1, 0]$.

Exercice n°4: (5.5 points)

$$\text{Soit } (U_n) \text{ la suite réelle définie sur } \mathbb{N} \text{ par : } \begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 3$.
b) Montrer que (U_n) est décroissante.
c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .
- 2) a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(U_n - 3)$.
b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
c) Retrouver alors la limite ℓ de (U_n) .

Bon travail !