Lycée Secondaire

Devoir de contrôle N°01

Durée 02 heures

Classe : $4^{\text{ème}}$ Sciences

EXERCICE N° 01 (3 pts)

Répondre par vrai ou faux :

	Affirmations	Vrai ou faux
1	**Une suite bornée ne peut pas être strictement monotone**	
2	**La suite** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **définie par** $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$ **est décroissante à partir du rang** 2.	
3	**Si une suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **vérifie pour tout** $n\in\mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, **alors cette suite est croissante**	
4	**Soit** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite définie par** $u_{n+1} = f(u_n)$, **si la fonction** f **est croissante alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante**	
5	$\mathbf{10+15+20+\cdots+2005+2010=405010}$	
6	$\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n}\sqrt{n \quad 1} \quad 1$	

EXERCICE N° 02 (7 pts)

1- Soit $f(x)=3x+2\sin(x)$

a) Déterminer D_f.

b) Montrer que pour tout $x\in D_f$, on a : $3x-2\leq f(x)\leq 3x+2$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

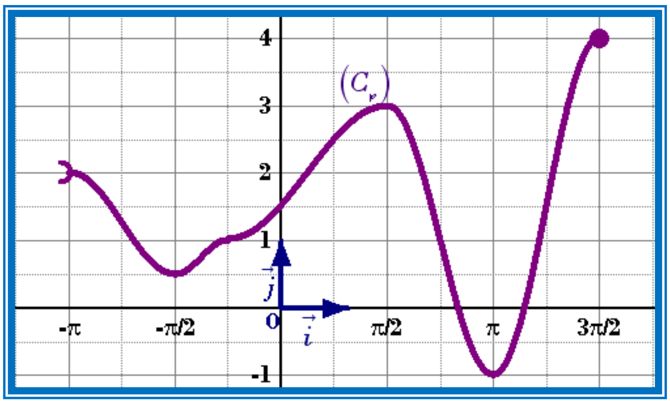
2- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{f(x)} & \text{si } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{5} & \text{si } x=0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 0.

b) Montrer que pour tout $x\in\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$, on a : $\dfrac{x}{3x+2}\leq g(x)\leq\dfrac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3- La courbe (C_φ) ci –dessous est celle d'une fonction φ définie sur $\left]-\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.



+ =

a) Déterminer $\varphi\left(\left]-\pi,\frac{3\pi}{4}\right]\right)$ et $\varphi\left(\left]-\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\right)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\varphi\left(\frac{\sin(x)}{x}-\frac{\pi}{2}-1\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(\frac{x^2+\sin(x)}{\cos(x)+x^2}-1\right)$

4- Montrer que l'équation $x^3+2x=4$ admet une unique solution $\alpha\in\left]1,\frac{3}{2}\right[$

EXERCICE N° 03 (6 pts)

Le $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$ d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

On désigne par ($\mathscr{C}$) le cercle trigonométrique.

1- Donner la forme exponentielle de z_A et z_B.

2- Dans la suite de l'exercice , M désigne un point de ($\mathscr{C}$) d'affixe $z=e^{i\theta}$; $\theta\in[0,2\pi[$

On considère l'application h qui à tout point M de ($\mathscr{C}$) associe $h(M)=MA\times MB$

a) Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a : $e^{i(2\theta)}-1=2i\sin(\theta)e^{i\theta}$

b) Montrer que $h(M)=\left|e^{i(2\theta)}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\theta}\right|$

c) En déduire que $h(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin(\theta)\right)^2}$

3-a) En utilisant 2-c) , montrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de ($\mathscr{C}$) , dont on donnera leurs affixes pour les quels $h(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b) En utilisant 2-c) , montrer qu'il existe un seul point M_3 de ($\mathscr{C}$) , dont on donnera son affixe pour lesquels $h(M)$ est maximale. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE N° 04 (4 pts)

1- Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}=\{M(z)\text{ tel que }|z-2+i|=2\}$

2- Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{F}=\left\{M(z)\text{ tel que }\left|\frac{iz+1-i}{\bar{z}+2+i}\right|=1\right\}$