

-Il est recommandé de soigner la rédaction et présentation de la copie-

Exercice n°1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse. Aucune justification n'est demandée.

(1) Dans plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points M_1 et M_2

d'affixes respectives z_1 et z_2 non nuls et tel que $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

- (a) Le triangle OM_1M_2 est un triangle équilatéral.
 (b) Le triangle OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle.
 (c) Les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

(2) Pour tout réel θ de $0, 2\pi$ on pose $z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$. Alors

(a) $z\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) pour tout réel θ de $0, 2\pi$, $z\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ est réel.

(c) pour tout réel θ de $0, 2\pi$, $z\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}}$ est réel.

(3) Soit z et m deux nombres complexes on a $\overline{iz + (1+i)m}$ égale à :

- (a) $-\overline{iz} + (1-i)\overline{m}$
 (b) $-\overline{iz} + (1-i)m$
 (c) $-\overline{iz} + (1-i)m$

Exercice n°2 : (4 points)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 - \sin x, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x + \cos x}{x^2 + 1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue en 0.

(2) (a) Montrer que : $\forall x \geq 0$; $\frac{x-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x^2+1}$

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) (a) Montrer que $\forall x < 0$; $2x \leq f(x) \leq 2x + 2$.

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Exercice n°3 : (6 points)

- (1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - \sqrt{2}(1+i)z - 1 + i = 0$.
- (2) Soit α un réel de l'intervalle $]0, \pi[$
Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E $_{\alpha}$) : $z^2 - 2e^{i\alpha}z + e^{2i\alpha} - 1 = 0$.
- (3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + e^{i\alpha}$, $z_B = -1 + e^{i\alpha}$, $z_C = 1 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ et $z_D = -1 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$.
 - (a) Vérifier que $z_A = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $z_B = 2i \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$.
 - (b) En déduire la forme exponentielle de z_C et z_D .
 - (c) Déduire de (a) que le triangle OAB est un triangle rectangle en O.
 - (d) Déterminer la valeur de α tel que le triangle OAB soit isocèle en O.
- (5) Soit M un point d'affixe z déterminer l'ensemble de point M tel que $\left| \frac{z - z_C}{z - z_D} \right| = 1$.

Exercice n°4 : (6 points)

Soit f la fonction, définie et continue sur \mathbb{R} , représentée par la courbe ζ_f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) . La droite T passant par F(1;2) est la tangente à ζ_f au point A (5 ; 3). La Courbe ζ_f admet au point C(1;1) deux demi-tangentes l'une est parallèle à l'axe des ordonnées et l'autre parallèle à l'axe des abscisses. Au point B (-1, $\frac{7}{3}$) la courbe ζ_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Par la lecture graphique :

- (1) (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.
- (b) Donner $f(-1)$ et $f'(-1)$
- (2) (a) Déterminer une équation de la droite T.
- (b) En déduire $f'(5)$
- (3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.
- (4) (a) Dresser le tableau des variations de f.
- (b) Déterminer $f(]-\infty, -2])$ et $f([2, 5])$.
- (5) (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet un unique solution $\alpha \in]-3, -2[$.
- (b) Sachant que pour tout $x \leq 1$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{5}{3}$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} .

