

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + \left(\frac{9}{4}\right)} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a $0 \leq f(x) - 1 \leq \frac{2}{x^2}$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

b) Etudier la continuité de f en 0

3. a) Justifier la continuité de f sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

c) Déterminer $f([0, 2])$, en déduire que l'équation $2f(x) - 7 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 2]$

Exercice 2 :

Soient les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & \text{et } v_0 = 2 \\ \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} & \text{et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Démontrer que l'on a : Pour tout n de \mathbb{N} ; $u_n < v_n$.

2. a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante

b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes. On posera : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

3. On considère la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} ; $w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$.

b) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} ; $w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que $\ell = \ell'$.

4. a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} ; $u_n v_n = 2$.

b) En déduire la valeur de ℓ

Exercice 3:

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{3}-1$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$.
 - a) Donner la forme cartésienne de z .
 - b) Vérifier que : $1-z = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3})(1-i)$.
 - c) Calculer le module et un argument de $1-z$.
2. a) Représenter dans le plan complexe les points A ; B et C d'affixes respectives : 1 , z , $1-z$
 - b) Quelle est la nature du quadrilatère $OBAC$?
3. Soit $S = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$.
 - a) Vérifier que $S(1-z) = 1 - z^6$,
 - b) En déduire un argument de S .

Exercice 4 :

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overline{U}, \overline{V})$. A tout point M d'affixe $z \neq -i$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{z+2i}{1-iz}$ et soient les points B et C d'affixes respectives $-i$ et $-2i$.

1. a) Vérifier que pour $z \neq -i$ on a : $-iz' = \frac{z+2i}{z+i}$
 - b) En déduire l'ensemble des points M tels que z' soit réel
2. a) Montrer que : $|z'| = \frac{CM}{BM}$
 - b) En déduire l'ensemble des points M lorsque M' varie sur le cercle trigonométrique.
3. Soit le nombre complexe : $W = \frac{z'-i}{z-i}$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$
 - a) Vérifier que pour tout nombre complexe z on a $(z-i)(1-iz) = -i(z^2+1)$.
 - b) En déduire que $W = \frac{-1}{z^2+1}$.
4. On pose $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 - a) Vérifier que $W = \frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$
 - b) En déduire en fonction de θ le module et un argument de W .