| | |
|---|---|
| *Lycée de Souassi*<br>***<br>**DEVOIR DE CONTROLE N° 1**<br>***<br>*30/10/2010* | **SECTIONS :** 4ème *Sciences Expérimentales* **2 & 3**<br>**EPREUVE :** *Mathématiques*<br>**DUREE :** 2 *heures*<br>**PROFESSEUR :** *Mr Wissem Fligène* |

**Exercice 1** : (3 pts)

*Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z$ vérifiant $|z-i| = |z+2|$ est :
   $a)$ un cercle  $b)$ une droite  $c)$ un point  $d)$ vide

2. Le complexe $z = -2i\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ est égal à :
   $a)$ $\sqrt{3} - i$  $b)$ $2\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$  $c)$ $2\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})}$  $d)$ $1 - i\sqrt{3}$

3. Soit la suite $(U_n)$ définie par $U_n = (-1)^n + 4$ alors :
   $a)$ $\lim U_n = +\infty$  $b)$ $U_n$ n'admet pas de limite  $c)$ $\lim U_n = 5$  $d)$ $\lim U_n = 3$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\sin x}{x+1}$ est égal à :
   $a)$ $+\infty$  $b)$ $0$  $c)$ $4$  $d)$ $2$

**Exercice 2** : (4 pts)

Soit la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\cos x$

1) a) Montrer que pour tout $x$ de $[0,+\infty[$, on a : $x - \dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq x + \dfrac{1}{2}$

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) Montrer que $f$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0,+\infty[$ une unique solution $\alpha$ et que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$

   c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x$ de $[0,+\infty[$.

**Exercice 3** : (5 pts)

Soit la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a $u_n < 2$

   b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

   c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite

2) Soit $(v_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

   a) Montrer que $(v_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

   b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$, en déduire $u_n$ en fonction de $n$

   c) Retrouver la limite de la suite $(u_n)$

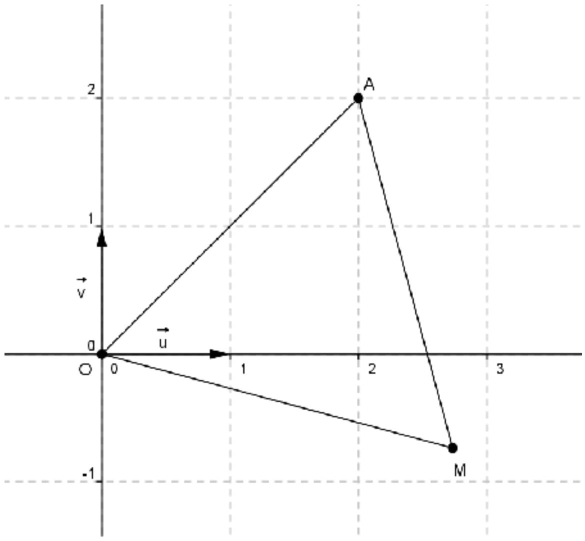
**Exercice 4** : (3 pts)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Le triangle OAM est équilatéral.

On donne $A(2,2)$.

Déterminer le module et un argument de chacun des affixes des points A et M




**Exercice 5** : (5 pts)

On considère les nombres complexes suivants:

$$z = 1+i \quad , \quad y = 1-i\sqrt{3} \quad , \quad U = \frac{z^3}{\bar{y}^2}$$

1) Écrire sous forme exponentielle $z$ et $y$. En déduire que $U = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) Montrer que $U^{24}$ est un réel strictement positif et que $U^6$ est imaginaire.

3) a) Vérifier que $U = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

## Correction

*Solution-Exercice 1* (**4 × 0,75 pt**)

1) b) 2) d) 3) b) 4) b)

*Solution-Exercice 2*

$f$ *définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $f(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$

1) a) $ur\ x \geq 0, -1 \leq \cos x \leq 1$ *alors* $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}$ *alors* $x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{1}{2}$ (**0,5 pt**)

b) $x - \frac{1}{2} \leq f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (**0,75 pt**)

2) a) $f$ *est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *(somme et produit) et* $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x$

*or pour* $x \geq 0, -1 \leq \sin x \leq 1$ *donc* $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}$ *et par suite* $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$ donc

$f'(x) > 0$ *d'où* $f$ *est strictement croissante sur* $[0,+\infty[$ (**0,75 pt**)

b) *Montrons d'abord que l'équation* $f(x) = 0$ *admet dans* $[0,+\infty[$ *une unique solution* $\alpha$

$f$ *est continue et strictement croissante sur* $[0,+\infty[$

$$f([0,+\infty[\,) = \left[f(0), \lim_{+\infty} f\right[ = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[ \text{ qui contient } 0 \text{ alors l'équation}$$

$f(x) = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in [0,+\infty[$ (**1 pt**)

*Montrons maintenant que* $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ :

$f(0) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-0{,}5) \times (0{,}09) < 0$ *donc* $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ **(0,5 pt)**

c)

| $x$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

*Alors*

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**(0,5 pt)**

<u>*Solution-Exercice 3*</u>

1) a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in IN$, on a $u_n < 2$

- pour $n = 0$, $u_0 = -1 < 2$
- on suppose que $u_n < 2$, montrons que $u_{n+1} < 2$

$$u_n < 2 \; alors \; -u_n > -2 \; alors \; 4 - u_n > 2 \; alors \; \frac{1}{4 - u_n} < \frac{1}{2} \; alors \; \frac{4}{4 - u_n} < 2 \; d'où \; u_{n+1} < 2$$

- pour tout $n \in IN$, on a $u_n < 2$ (**1 pt**)

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{4-u_n} - u_n = \frac{4-4u_n+u_n^2}{4-u_n} = \frac{(2-u_n)^2}{4-u_n} \geq 0$ (car $u_n < 2 < 4$ $donc$ $4 - u_n > 0$)

donc la suite $(u_n)$ est croissante. (**0,5 pt**)

c) $u_n$ est croissante et majorée alors $u_n$ est convergente vers un réel $\ell$ tel que $\ell \leq 2$

or $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{4}{4-x}$

$f$ est continue sur $]-\infty, 2]$ alors $f(\ell) = \ell$ sig $\frac{4}{4-\ell} = \ell$ sig $(4 - \ell)\ell - 4 = 0$ sig $\ell^2 - 4\ell + 4 = 0$ sig $(\ell - 2)^2 = 0$ sig $\ell = 2$

Conclusion : $u_n$ est convergente vers 2 (**1 pt**)

2) a)

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4}{4 - u_n} - 2} = \frac{1}{\frac{4 - 8 + 2u_n}{4 - u_n}} = \frac{4 - u_n}{2u_n - 4} = \frac{4 - u_n}{2(u_n - 2)}$$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{4-u_n}{2(u_n-2)} - \frac{1}{u_n-2} = \frac{4-u_n-2}{2(u_n-2)} = \frac{2-u_n}{2(u_n-2)} = \frac{-(u_n-2)}{2(u_n-2)} = -\frac{1}{2}$

D'où $v_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0-2} = -\frac{1}{3}$ (**1 pt**)

b) $v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}n = -\frac{3n+2}{6}$ (**0,5 pt**)

d'autre part, on a $v_n = \frac{1}{u_n-2}$ sig $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$ sig $u_n = \frac{1}{v_n} + 2 = 2 - \frac{6}{3n+2} = \frac{6n+4-6}{3n+2} = \frac{6n-2}{3n+2}$ (**0,5 pt**)

c) $\lim \; u_n = \lim \; \frac{6n-2}{3n+2} = \lim \; \frac{6n}{3n} = 2$ (**0,5 pt**)

<u>*Solution-Exercice 4*</u>

- $A(2{,}2)$ donc $z_A = 2 + 2i$

  Donc $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ (**0,75 pt**)

  Ainsi $z_A = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ d'où $arg(z_A) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ (**0,75 pt**)

- On a OAM est équilatéral alors $OM = OA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

  $|z_M| = OM = OA = |z_A| = 2\sqrt{2}$ (**0,75 pt**)

$$\arg(z_M) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi] \equiv arg(z_A) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi] \quad \mathbf{(0,75\ pt)}$$

*<u>Solution-Exercice 5</u>*

1) $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (**0,5 pt**)

$y = 1 - i\sqrt{3}$

$|y| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ et soit $\theta \equiv \arg(y)\ [2\pi]$ alors $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$y = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\ \mathbf{(0,5\ pt)}$$

$$U = \frac{z^3}{\bar{y}^2} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{\left(\overline{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\ \mathbf{(1\ pt)}$$

2) $U^{24} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{24} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24} e^{i\frac{24\pi}{12}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24} \underbrace{e^{i2\pi}}_{1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24}$ qui est un réel strictement positif (**0,5 pt**)

$U^6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 e^{i\frac{6\pi}{12}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 i$ qui est imaginaire (**0,5 pt**)

3) a)

$$U = \frac{z^3}{\bar{y}^2} = \frac{(1+i)^3}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{(1+i)^2(1+i)}{1+2i\sqrt{3}-3} = \frac{2i(1+i)}{-2+2i\sqrt{3}} = \frac{-2+2i}{-2+2i\sqrt{3}} = \frac{-2(1-i)}{-2\left(1-i\sqrt{3}\right)} = \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{1+3} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\ \mathbf{(1\ pt)}$$

b)

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

donc

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases} sig \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases} sig \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}\ \mathbf{(1\ pt)}$$