

**Exercice 1 :** (4 points)

Pour chaque question, une seule proposition est exacte. Laquelle ? Aucune justification n'est demandée.

1) Soient  $f$  et  $g$  deux fonction vérifiant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . alors :

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} fog(x) = 3$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} gof(x) = 3$

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} fog(x) = +\infty$ .

2) Soit dans le plan complexe les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 2+i$ ,  $z_B = 3-2i$  et  $z_C = 5+2i$ .

a.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés    b.  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont orthogonaux    c.  $ABC$  est équilatéral

3) L'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $|z-2+i| = |z+i|$  est :

a. Un cercle

b. un singleton

c. une droite

4) Les solutions dans  $\mathbb{E}$ , de l'équation :  $z^2 - (1+4i)z - 5(1-i) = 0$  sont :

a.  $1-3i$  et  $2+i$

b.  $-1+3i$  et  $2+i$

c.  $1-3i$  et  $2-i$

**Exercice 2 :** (6 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{E}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que  $f$  est continue en 0.

2) Justifier alors la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{E}$ .

3) a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

b. Montrer que : pour tout  $x > 0$ ,  $2 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{1}{x}$ . Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

4) a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[-1, 0]$ .

b. Donner un encadrement d'amplitude 0,25 de .

**Exercice 3 :** (5 points)

1) On considère dans  $\mathbb{E}$ , l'équation (E) :  $z^2 - 2z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

a) Vérifier que  $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{E}$  l'équation (E).

2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points

d'affixes respectives  $z_A = 2$ ;  $z_B = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_C = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

a) Montrer que pour tout réel  $\theta$  on a :  $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

b) Ecrire  $z_B$  et  $z_C$  sous forme exponentielle .

c) Calculer  $\frac{z_B}{z_C}$  en déduire que le triangle  $OBC$  est rectangle en  $O$ .

d) Montrer que  $OBAC$  est un rectangle .

**Exercice 4:** (5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .
- 2) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{2(u_{n+1} + u_n)}$ .
- 3) Vérifier alors que  $(u_n)$  est décroissante.
- 4) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.
- 5) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n^2 - 1$ .
  - a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$ .
  - b. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire la limite de  $v_n$  et la limite de  $u_n$ .

Bon Travail