Devoir de contrôle n° 02

©©©©©© ☞ Proposé par M r :➤ Baccouch - Hichem ➤ 18-02- 2012 ➤ Durée : 2 heures ©©©©©©

Exercice n°1 (04 points)

Répondre par vrai ou faux sans justification

①- Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$ tel que $f''(1)=0$
Alors $A(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe ζ_f

②- Soit f une fonction bijective $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
Si f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors f^{-1} est strictement décroissante $\mathbb{R}$

③-La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t-1 \end{cases}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est $x+2y+z-3=0$

④-Soit $A(1,0,1)$ et $B(-2,1,0)$, une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ est $x^2+y^2+z^2+x-y-z-2=0$

Exercice n°2 (06 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(3,2,4)$; $B(0,3,5)$ et $C(3,1,0)$

①-a-Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$
b- En déduire que ABC est un triangle et calculer son aire

②- Soit le point $E(1,m+2,-1)$ où m est un réel .
a-Calculer, en fonction de m , $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AE}$
b- En déduire la valeur de m pour que E soit un point du plan (ABC)

③-Dans la suit en prend $m=2$. Soit H le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC)
a- Calculer le volume de tétraèdre EABC
b- En déduire la distance EH

④-a- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH)
c- Déterminer les coordonnées du point H

⑤-Soit S la sphère dont une équation cartésienne est $x^2+y^2+z^2-4x+4y-10z+15=0$
a- Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R de S
b- Vérifier que la droite (AI) est perpendiculaire au plan (ABC)
c- Déterminer la position relative du plan (ABC) et la sphère S

Exercice n°3(06 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x\in]0,1[\\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}$

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a- Vérifier que f est continue en 1

b- Etudier la dérivabilité de f à droite et çà gauche en 1 .

Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2) a- Etudier les variations de f

b- Montrer que la droite $D: y=x$ est une asymptote à ζ

c- Préciser la position relative de ζ par rapport à D sur $[1,+\infty[$

d- Tracer D et ζ

3) a- Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b- On note f^{-1} la fonction réciproque de f , Montrer que f^{-1} est dérivable en 0

c- On désigne par ζ' la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Tracer ζ'

4) Montrer que ,pour tout $x\in]-\infty,0]$, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice n°4(04 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

1)-a- Prouver que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}_+$

b-Soit F la primitive de f qui s'annule en 0, montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=F(\tan x)$

a- Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $H'(x)=1$

b- Déduire que $H(x)=x$, $\forall x\in I$

c- Calculer $F(1)$ et $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

©-Bon travail-©