REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
LYCEE SECONDAIRE MATEUR

DEVOIR DE CONTRÔLE N 1 - ANNEE SCOLAIRE : 2011-12

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE :** 2h **COEFFICIENT :** 3

PROFESSEUR : HATEM EDDHAOUI

''Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie''

Exercice 1 (3 points)

Répondre par ***vrai*** *ou* ***faux*** *en justifiant la réponse :*

1) Lorsque θ varie dans $[0,\pi]$, le point M d'affixe $i+2e^{i\theta}$ varie sur un cercle.
2) La suite U définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par : $u_n=\frac{(-1)^n}{n}$, n'a pas de limite.
3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, et si, pour tout $x\le 2$, $g(x)=4x-\sqrt{2-x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)=+\infty$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, -3i et –i.

Pour tout point M du plan d'affixe z (z≠ -3i), on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z'=\frac{iz-1}{z+3i}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$.
3) a) Vérifier que (z' – i)(z + 3i) = 2.

   b) En déduire que AM'.BM = 2 et que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\equiv 0\,[2\pi]$.

4) Soit le point E d'affixe $z_E=-3i-2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   a) Calculer BE.

   b) Déterminer $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BE}})$.

Exercice 3 (6 points)

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x\langle -1 \\ 4x^3+6x^2-1 & \text{si } -1\leq x\leq 0 \\ \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x}-1 & \text{si } x\rangle 0 \end{cases}$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $-1\leq f(x)\leq \frac{2}{x}-1$.

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0.

B/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2-1}-4$.

1) Déterminer le domaine de continuité de g.
2) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1,+\infty[$.
   a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
   b) Déterminer h $([1,+\infty[)$.
3) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution sur $[4,5]$.

Exercice 3 (6 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=4 \\ U_{n+1}=\dfrac{4U_n-3}{U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n\geq 3$.

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

2) a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1}-3\leq\frac{1}{3}(U_n-3)$.

b) En déduire, par récurrence, que, pour tout $\in\mathbb{N}$, on a : $U_n-3\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Retrouver alors la limite ℓ de (U_n).