Mr : Mondher Bouaziz — Devoir De Contrôle N1 — Classe 4 Sc exp

(Mathématique) — 2011

Exercice N 1 (3 points)

Indiquer la seule réponse exacte aucune justification n'est demandée

1°) z est un nombre complexe alors $|z+i| =$

(a) $|z|+1$ (b) $|iz-1|$ (c) $|z-i|$

2°) Si la suite $(|u_n|)$ converge vers 1 alors la suite (u_n) est :

(a) majoré (b) converge vers 1 (c) converge vers 1 ou – 1

3°) (u_n) une suite réelle définie par $u_n = \begin{cases} \left(\frac{-2}{3}\right)^n & si\ n\ est\ pair \\ \frac{1}{n} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$ alors

(a) la suite (u_n) n'est pas convergente (b) on ne peut rien dire (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice N 2 (4 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

1°) Déterminer le module et un argument de z_A.

2°) a/ Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

b/ Déduire la forme exponentielle de $\frac{z_B}{z_A}$

3°)a/ En déduire que $z_B = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) e^{i\pi/12}$

b/ Donner alors une construction du point B

Exercice N 3 (6,5 points)

Dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .On considère les points A, B et D d'affixes respectivement $z_A = -i$, $z_B = 3i$ et $z_D = -2 + i$

I/ 1°) Placer les points A, B et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

2°) a / Ecrire $\frac{z_D - z_A}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique

b/ Déduire que ABD est un triangle rectangle isocèle en D

c / Déterminer l'affixe du point C tel que ACBD soit un carré

II/ À tout point M distinct de B d'affixe z on associe le point M ' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{iz - 1}{z - 3i}$$

1°) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est imaginaire

2°) a/ Montrer que $|z'| = \dfrac{MA}{MB}$

b/ En déduire que si M appartient à la médiatrice de segment [AB] alors le point M ' appartient à un cercle que l'on déterminera

3°) Soit I le milieu de segment [AB] d'affixe z_I

a/ Vérifier que $z' - z_I = \dfrac{-4}{z - z_B}$

b/ En déduire que $(\vec{u}, \vec{IM'}) \equiv \pi - (\vec{u}, \vec{BM})\ [2\pi]$

c / Déterminer l'ensemble des points M ' lorsque M décrit la demi droite $[B, \vec{v})$ privé de B

<u>Exercice N 4 (6.5 points)</u>

Soit f la fonction définie sur ∡ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} + x & si\ x \le 0 \\ \dfrac{\sin\frac{x}{2}\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

1°) a/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b/ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{-1}{\sqrt{x+4}-2} \le f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{x+4}-2}$.

c/ En déduire: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2°) a/Montrer que f est continue en 0

b/ Etudier la continuité de f sur IR

3°) On suppose que la restriction de f sur $]-\infty, 0]$ est strictement croissante

Montrer que $f(x) = 1$ admet une solution unique α dans $[-2, -1]$

4°) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction h continue sur *IR*

a/ Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} h \circ f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} h \circ f(x)$

b/ Etudier la continuité de $h \circ f$ sur IR