REPUBLIQUE TUNISIENNE **** MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION **DEVOIR DE CONTROLE N° : 1**			LYCEE DE KASSERINE **** MR: JEMLI KHALED
EPREUVE : MATHEMATIQUES	**COEFFICIENT : 4**		**NIVEAU ET SECTION : 4$^{\text{éme}}$ SC**
Première trimestre	**Date :**	**15 Novembre 2012**	**Durée : 2 Heures**

QCM : 4,5pts

Dans chaque question indiquer la bonne réponse.

1) *Soit* $Z= -3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$ *alors :*

   a) *Un argument de Z est :* $-3\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$; $\pi+\arg(1+i\sqrt{3})-\arg i$; $-3\,\frac{\arg(1+i\sqrt{3})}{\arg i}$

   b) *Le module de Z est :* $-3\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right|$; $3\left|1+i\sqrt{3}\right|$; $3\left(\left|1+i\sqrt{3}\right|-\left|i\right|\right)$

2) *Les solutions de l'équation* $z^6=8i$ *sont les* z_k *avec* $k\in\{0;1;\ldots\ldots\ldots 5\}$ *vérifiant :*

   $z_k=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)}$; $z_k=\sqrt{2}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)}$; $z_k=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)}$

3) *On note (E) :* $3z^2-z+5=0$ *alors (E) possède dans* $\mathbb{C}$ *:*

   Deux solutions réelles — *une racine double* — *deux solutions conjuguées*

4) *Soit f une fonction continue et strictement croissante sur* $[-1.3]$ *vérifiant* $f(-1)=-2$ *et* $f(3)=-1$*. Alors l'équation* $f(x)=0$ *admet dans* $[-1.3]$ *:*

   deux solutions — *une seule solution* — *aucune solution.*

5) *Soient f et g deux fonctions tels que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ *et* $\lim\limits_{x\to1} g(x)=3$ *alors :*

   $\lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)=3$ — $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)=3$ — $\lim\limits_{x\to1} gof(x)=3$

Ex2 :8pts

A- Soit $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-1} & si\ x<-1 \\ 4x^3+6x^2 & si\ -1\le x\le 0 \\ \frac{1-\cos(\pi x)}{x} & si\ x>0 \end{cases}$

1) a) *Calculer :* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   b) *Montrer que* $\forall\ x>0$; $0\le f(x)\le\frac{2}{x}$

   c) *En déduire :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) *Etudier la continuité de f en -1 et en 0.*

B- *Soit* $g(x)=\sqrt{x^2-1}-4\quad\forall\ x\in IR$.

1) *Déterminer le domaine de continuité de g.*
2) *Soit h la restriction de g à l'intervalle* $[1;+\infty[$.
   a) *Montrer que h est strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.
   b) *Déterminer* $h([1;+\infty[)$.
   c) *Montrer que l'équation* $h(x)=0$ *admet dans* $[4;5]$ *une unique solution* α.
3) *Soit* $\varphi(x)=h(x)+x\quad\forall\ x\in[1;+\infty[$.
   a) *Montrer que* φ *est strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.
   b) *Déterminer* $\varphi([2;3])$.
   c) *Déduire que l'équation* $h(x)=-x$ *admet dans* $[2;3]$ *une unique solution* x_0.

Ex3 : 7,5pts

A- 1) Soit $a=-1-2i\sqrt{2}$ un nombre complexe. Déterminer les racines carrées de a.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i\sqrt{2})z + i\sqrt{2} = 0$.

B- On donne les points : A ; B ; M et M ' les points d'affixes respectives : 1 ; $i\sqrt{2}$; z et $z' = \dfrac{z-i\sqrt{2}}{z-1}$ avec $z \neq 1$

1) a) Montrer que $|z'| = \dfrac{BM}{AM}$.

b) Déduire l'ensemble des points M(z) tel que : $|z'| = 1$.

2) Chercher l'ensemble des points M(z) tel que : $\text{Arg}(z') \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) a) Montrer que $\forall\ z \neq 1$; $|z'-1||z-1| = \sqrt{3}$.

b) Déduire que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$ alors M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

4) Soit D le point d'affixe $z_D = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0;\pi[$.

a) Vérifier que : $e^{i\theta} - 1 = 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Déduire AD en fonction de θ.

c) Déterminer la valeur de θ pour que : ABD soit isocèle en A.

Bon travail