

<b>Prof</b>	Mechmeche Imed
<b>Lycée</b>	Borj-cedria
<b>Niveau</b>	4 <sup>ème</sup> SC1

## Devoir de contrôle N°1

<b>Matière</b>	Maths
<b>Date</b>	14/11/2012
<b>Durée</b>	2 h

### Exercice 1 : (3 pts)

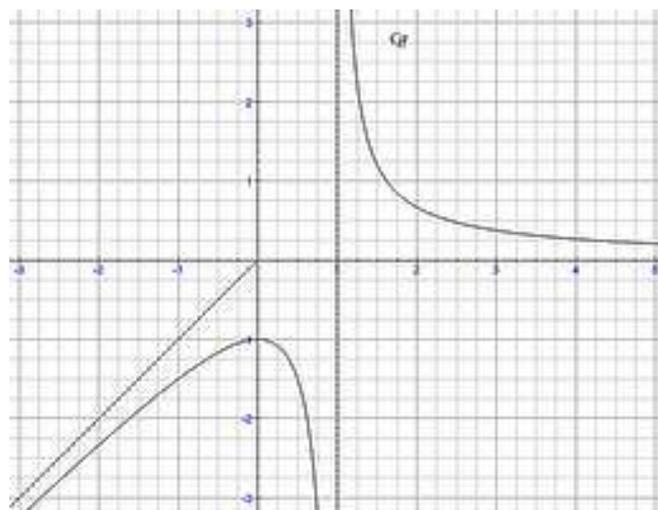
Répondre par vrai ou faux sans justification

- 1) Soit  $z = \frac{ie^{i\frac{\pi}{6}}}{1-i}$ , alors un argument de  $z$  est  $\frac{11\pi}{12}$
- 2) L'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $z = i\bar{z}$  est une droite
- 3) Si  $a = e^{i\alpha}$  et  $b = e^{i\beta}$  alors  $\arg(a + b) = \frac{\alpha + \beta}{2}$
- 4)  $(\sqrt{3} + i)^6 = -64$

### Exercice 2 : (6 pts)

Dans la figure ci-contre  $C_g$  est la représentation graphique d'une fonction  $g$  définie est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . On sait que :

- $y = 0$  est asymptote à  $C_g$  en  $+\infty$
  - $y = x$  est asymptote à  $C_g$  en  $-\infty$
  - $x = 1$  est asymptote verticale
- 1) Par une lecture graphique déterminer :



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - x$$

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin g(x)}{g(x)} & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \\ \frac{x}{g(x)} & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \end{cases}$

- a) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$
- b) Montrer que pour  $x > 1$  on a  $\frac{-1}{g(x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{g(x)}$
- c) En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 1
- d) Sachant que  $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$  et  $g\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{13}{4}$  montrer que l'équation  $f(x) = -\frac{1}{4}$  admet au moins une solution dans  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$



### Exercice 3 : (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{U}, \vec{V})$

Soit le nombre complexe  $z = 2i + 2e^{i\theta}$ .  $\theta \in [0, \pi]$

- 1) Vérifier que  $z = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$
- 2) Pour cette question on prend  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 
  - a- écrire  $z$  sous forme algébrique puis montrer que  $|z|^2 = 8 + 4\sqrt{3}$
  - b- écrire  $z$  sous forme exponentielle
  - c- en déduire la valeur exacte de  $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- 3) Soit les points  $N(e^{i\theta})$ ,  $A(-i)$  et  $I(1)$ , Déterminer la forme exponentielle de  $\frac{z_{\vec{AN}}}{z_{\vec{AI}}}$
- 4) En déduire la valeur de  $\theta$  pour laquelle  $\vec{AN}$  et  $\vec{AI}$  sont orthogonaux.

### Exercice 4 : (6 pts)

Soit la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n - 2} + 2 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3 \leq U_n \leq 11$
- 2) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n - 2}(1 - \sqrt{U_n - 2})$
- 3) Montrer alors que la suite  $U$  est décroissante.
- 4) Déduire de ce qui précède que  $(U_n)_{n \geq 0}$  est convergente et déterminer sa limite.
- 5) a- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $0 < (U_{n+1} - 3) \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$ 
  - b- En déduire que  $0 < (U_n - 3) \leq 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$
  - c- Retrouver alors la limite de la suite  $U$ .

Bon travail. 😊