PROF : B.ANIS L.S.ELKSOUR	DEVOIR DE CONTROLE N°1 MATHEMATIQUES 08-11-2013	$4^{\text{ième}}$sc-exp$_1$ DUREE :2 heures

EXERCICE N°1(3pts)

Dans chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte indiquer la .

1)Z_1et Z_2 sont les solutions complexes de Z^2-2Z+5=0 .M_1 et M_2 deux points du plan complexe d'affixes respectives Z_1et Z_2.O est le point d'affixe 0.ona :

a)Le milieu de [M_1M_2] a pur affixe 2.   b)Le triangle O M_1M_2 est équilatérale   c) Ré(Z_1)=Ré(Z_2)

2) Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur IR tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 et \lim\limits_{x\to1} g(x)=3$ alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)=3$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)=3$ c) $\lim\limits_{x\to1} gof(x)=3$

3)Soit la suite (w_n)définie sur IN par w_0=1 et w_{n+1}=f(w_n) avec f est une fonction défini et croissante sur IR.Alors :

a) la suite W est décroissante.   b) la suite w est croissante   c) On ne peut rien conclure pour le sens de variation de la suite w.

EXERCICE N°2(5pts)

I)Soit la fonction *f* définie par *f*(x)=$\dfrac{2x^2+x-3}{\sqrt{x}-1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de *f*.

2) Montrer que *f* est continue sur D_f .

3) a) Montrer que *f*(x)=5 admet au moins une solution $\alpha \exists[0,\dfrac{1}{4}]$

c) Montrer que : $\sqrt{\alpha}=\dfrac{2}{5}\left(\alpha^2+\dfrac{1}{2}\alpha+1\right)$

4)a) f est elle prolongeable par continuité en 1 ? Justifier

b) Montrer que 3 est le minimum de *f* sur D_f.

EXERCICE N°3(6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{U},\vec{V}\right)$.

On désigne par A , B ,M_1 et M_2les points d'affixes respectives 2 , 3 ,$z_1=2+i\sqrt{2}$ et $z_2=2-i\sqrt{2}$.

1)a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1-3}{z_1}$.

b) En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle

2) On appelle f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=z^2-4z+6$.On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

a) Déterminer l'antécédent du point O par f.

b)Vérifier que $z'-2=(z-2)^2$.

c) Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2+\sqrt{2}\,e^{2i\theta}$ avec $\theta\exists]-\prod,\prod]$.Vérifier que $z'=2+2e^{2i\theta}$ et en déduire que le point M' est situé sur un cercle ζ dont on précisera le centre et un rayon.

3) Soit le point D d'affixe $d=2+\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$.Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe d-2.

En déduire que D est situé sur Γ

EXERCICE N°4(6pts)Soit la suite (u_n) défini sur IN par $U_0=0$ et $U_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1)Montrer que pour tout entier naturel n on a:$0<U_n<1$.

2)a)Montrer que (u_n) est croissante.

b)En déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

3)a)Montrer que pour tout entier naturel n on : $|U_{n+1}-1|\leq\dfrac{1}{2}|U_n-1|$.

b)En déduire que $|U_n-1|\leq(\dfrac{1}{2})^n$ pour tout entier n.Retrouver alors la limite de la suite U.

4)soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n=\dfrac{1-u_n}{1+u_n}$.

a)Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b)ExprimerV_n puis U_n en fonction de n.

c)Exprimer $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{u_k+1}$ en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

BON TRAVAIL