

**Exercice n°1:** (3pts)

Pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer la quelle.

1) Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\theta$ . un argument de  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$  est :

a)  $-\frac{\pi}{3} + \theta$

b)  $\frac{2\pi}{3} + \theta$

c)  $\frac{2\pi}{3} - \theta$

2) L'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $z = 2i + e^{i\theta}$  où  $\theta$  est un nombre réel est :

a) une droite

b) un cercle de centre  $A(2i)$  et de rayon 1

c) un cercle de centre  $A(-2i)$  et de rayon 1

3) L'ensemble des points  $M(z)$  tel que  $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{z}$  est :

a) L'axe des ordonnées

b) Le cercle trigonométrique

c) L'axe réel.

**Exercice n°2:** (5pts)

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et on considère le cercle (C) de centre A d'affixe 1 et de rayon 1.

F, B et E les points d'affixes respectives  $z_F = 2$ ;  $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_E = 1 + z_B^2$

1) a) Montrer que B appartient à (C).

b) Déterminer un argument de  $\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$ . En déduire la nature du triangle ABF.

2) a) Montrer que pour tout  $]\theta, \pi[$ ,  $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) Déterminer alors la forme exponentielle de  $z_B$

c) Montrer que A, B et E sont alignés.

3) Pour tout nombre complexe  $z \neq 1$ , on considère les points M et M' d'affixes respectives  $z$  et  $1 + z^2$

Montrer que  $\frac{z^2}{z-1}$  est réel si et seulement si A, M et M' alignés.

**Exercice n°3:** (6pts)

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$

1) a) Vérifier que pour tout  $x$  non nul :  $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}}$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 0 et définir g.

2) a) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a  $\sqrt{1+x^2} + 1 \leq 2\sqrt{1+x^2}$

b) En déduire que :  $f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$

c) Montrer que pour tout réel non nul  $x$  on a :  $f(x) \leq \frac{1}{1+|x|}$

3) Calculer alors les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f(x)$

4) a) Montrer que  $f$  strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$

b) Montrer que l'équation :  $f(x) = \frac{2}{5}$  admet une solution unique dans  $]1, 2[$ .

**Exercice n°4** : (6pts)

On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2$ ,  $v_n = \frac{2}{u_n}$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont minorées par 1 et majorées par 2.

2) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$

b) Montrer alors par récurrence, que tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n \geq v_n$ .

c) Montrer que  $(u_n)$  est décroissante et  $(v_n)$  croissante. En déduire qu'elles sont convergentes.

3) a) Montrer que si  $1 \leq x \leq 2$  et  $1 \leq y \leq 2$  alors  $x - y \leq 1$  et  $\frac{x - y}{2(x + y)} \leq \frac{1}{4}$

b) En déduire que :  $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{4}(u_n - v_n)$

c) Montrer alors que :  $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

4) On donne : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$ . Déterminer la limite de  $(v_n)$ .

**Bon travail**