

<u>Lycée Houmet Souk 1</u>	<u>Devoir de Contrôle N : 1</u>	<u>4 Sciences Exp 3</u>
<u>Prof : Loukil Mohamed</u>	<u>Durée : 2 Heures</u>	<u>15 - 11 - 2013</u>

**EXERCICE N : 1 ( 4.5 points )**

**Sans justification , déterminer la seule réponse correcte de chacune des propositions suivantes :**

- 1) Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] = 1$  alors la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal admet :
- a) Une asymptote oblique      b) Une branche parabolique      c) on ne peut pas conclure
- 2) Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = 1 - x^3$  alors
- a)  $g([1, 2[) = [-7, 0[$       b)  $g([1, +\infty[) = ]-\infty, 0[$       c)  $g([0, 1]) = [0, 1]$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$
- a)  $\frac{1}{2}$       b) 0      c) n'existe pas
- 4) Si  $h$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ ,  $h(0) = 2$  et  $h(1) = 4$  alors l'équation  $h(x) = 0$  admet dans  $[0, 1]$  :
- a) au moins une solution      b) aucune solution      c) on ne peut pas conclure
- 5) Soit la suite  $(S_n)$  définie  $\mathbb{N}^*$  par :  $S_n = \frac{2}{n^2+1} + \frac{4}{n^2+1} + \frac{6}{n^2+1} + \dots + \frac{2n}{n^2+1}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n =$
- a) 1      b) 0      c)  $+\infty$
- 6) Soit  $n$  un entier naturel. Le nombre complexe  $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$  est égal à :
- a)  $2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$       b)  $2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$       c)  $2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

**EXERCICE N : 2 ( 5 points )**

- 1) a) Calculer  $(1 + 3i)^2$  .  
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - (1 - i)Z + 2(1 - i) = 0$  .
- 2) Soit, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation : (E)  $Z^3 - 2(1 - i)Z^2 + 2(1 - 2i)Z + 4i = 0$
- a) Vérifier que  $(1 - i)$  est une solution de (E) :  
b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) .
- 3) Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \bar{u}, \bar{v})$ .  
On donne les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $Z_A = -2i$  ,  $Z_B = 1 - i$  et  $Z_C = 1 + i$  .
- a) Montrer que  $OABC$  est un parallélogramme .  
b) Calculer  $\frac{Z_B - Z_A}{Z_B}$  puis déduire la nature du triangle  $OAB$  .  
c) Déterminer l'aire du parallélogramme  $OABC$  .

### EXERCICE N : 3 ( 5 points )

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $R ( O ; \vec{u} ; \vec{v} )$  . ( Unité : 2 cm )

On pose  $Z_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  ,  $Z_{n+1} = ( 1 + i ) Z_n$  .

On note  $M_n$  le point du plan d'affixe  $Z_n$  .

1 ) a ) Calculer  $Z_1, Z_2, Z_3$  et  $Z_4$  .

b ) Placer les points  $M_0, M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  sur une figure .

2 ) a ) Etablir que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $Z_{n+1} - Z_n = i Z_n$  .

b ) En déduire que  $M_n M_{n+1} = OM_n$  .

3 ) Pour tout entier naturel  $n$  , on pose :  $U_n = |Z_n|$  .

a ) Montrer que la suite  $( U_n )$  est géométrique .

b ) Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_n = (\sqrt{2})^n$  .

4 ) Pour tout entier naturel non nul  $n$  , on pose :  $L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_{n-1} M_n$  .

a ) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $L_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$  .

b ) Exprimer  $L_n$  en fonction de  $n$  .

c ) Déduire, en cm , la longueur de la ligne brisée  $M_0 M_1 M_2 M_3 M_4$  .

### EXERCICE N : 4 ( 5.5 points )

On considère la suite réelle  $( U_n )$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}$  .

1 ) a ) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  ;  $U_{n+1} - 1 = \frac{-1}{(U_n + \sqrt{1+U_n^2})\sqrt{1+U_n^2}}$  .

b ) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  ;  $0 < U_n \leq 1$

c ) Montrer que la suite  $( U_n )$  est décroissante .

d ) En déduire que la suite  $( U_n )$  est convergente et calculer sa limite .

2 ) Soit la suite réelle  $( V_n )$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \left(\frac{1}{U_n}\right)^2$  .

a ) Montrer que  $( V_n )$  est une suite arithmétique de raison 1 .

b ) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$  .

c ) Déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ,  $U_n = \sqrt{\frac{1}{1+n}}$  et retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  .

3 ) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  , On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$  . Montrer que  $\sqrt{n+1} \leq S_n$  puis déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  .