

Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification

- 1) Le nombre complexe $Z = 2ie^{-i\frac{\pi}{2}}$ égal : a) -2i b) -2 c) 2
- 2) Soit deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} d'affixes respectifs $Z_u = 3e^{i\frac{3\pi}{5}}$ et $Z_v = 2e^{i\frac{-2\pi}{5}}$ alors
a) \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires b) \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux
- 3) Soit f une fonction continue sur [-2,2] alors la fonction g définie par $g(x) = \cos(f(x))$ est continue sur : a) [-1,1] b) [-2,2] c) IR

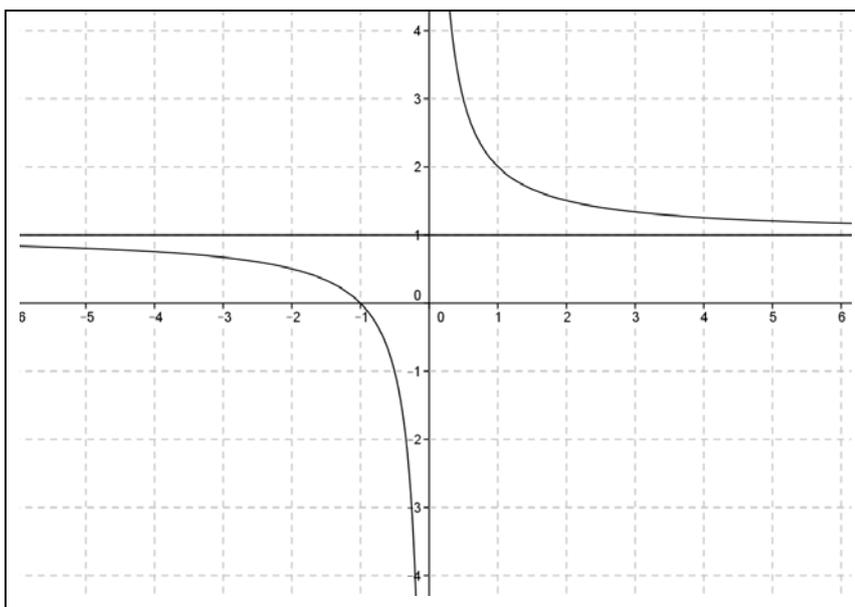
Exercice n°2 : (6 points)

- 1) Résoudre dans C l'équation (E) : $Z^2 - 2Z + 2 = 0$
- 2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B et C d'affixes respectifs : $Z_A = 1 + i$, $Z_B = 1 - i$ et $Z_C = 1 - i\sqrt{3}$.
a) Ecrire Z_A sous forme exponentielle puis déduire celle de Z_B .
b) Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.
c) Déterminer l'affixe du point D pour que OADB soit un carré.

- 3) A tout point M du plan d'affixe Z on lui associe le point M' d'affixe $Z' = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}Z - 2}{Z - 1 - i}$

- a) Ecrire Z_C sous forme exponentielle.
- b) Vérifier que : $Z' = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(\frac{Z - 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{Z - 1 - i} \right)$
- c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|Z'| = 1$

Exercice n°3 : (6,5 points)



La courbe ci-dessus est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* , elle admet la droite D: $y = 1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ et D' : $x = 0$ comme asymptote verticale.

1) a) Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 0^+ et en 0^- .

b) Calculer ces limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$

2) Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 1 \\ x^3 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue 1.

b) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 1]$

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 1]$ une unique solution α puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) Déterminer l'image de $]-\infty, 0[$ par la fonction composée $g \circ f$.

Exercice n°4 : (4,5 points)

Soit la suite définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq 2$.

b) Montrer que U est décroissante.

c) Dédire que U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3} (U_n - 2)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) Retrouver la limite de U .

Bon travail