L.S.C.K + L.Kesra 31 / 10 / 2015	**Devoir de Contrôle N°1** **Durée :2h**	$4^{ème}$ Sc . Exp Prof : Bahri .Tmim Bouhani.Allala

Q.C.M : (3 pts) : Choisir la bonne réponse sans justification.

1) Soit la suite $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ alors sa limite est :

a) 0 b) -1 c) n'admet pas de limite

2) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ alors $\lim_{x\to+\infty} gof(x) =$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ ; un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est

a) $\frac{-\pi}{3} + \theta$ b) $\frac{2\pi}{3} - \theta$ c) $\frac{2\pi}{3} + \theta$

Exercice n°1 : (5.5 pts)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ \ x > 0 \\ x^3 + x + 1 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on à : $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$

b) En déduire $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

c) Montrer que f est continue en 0.

d) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-0{,}7\ ;\ -0{,}6\ [$.

3) Monter que : $\alpha = -\frac{1}{\alpha^2+1}$

4) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to2^-} f\left(\frac{1}{x-2}\right)$; $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)$

Exercice n°2 :(6 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

I/ Soit le nombre complexe $z = 2i + 2e^{i\theta}$; $\theta \in [0,\pi]$.

1) Vérifier que : $z = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$

2) Pour cette question on prend : $\theta = \frac{\pi}{3}$

a) Ecrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2 = 8 + 4\sqrt{3}$.

b) Ecrire z sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur exacte de $cos^2(\frac{\pi}{12})$

II/ Dans la suite, on prend $\theta \in [0\,,2\pi[$

Soient N , A et I trois points d'affixes respectives : $e^{i\theta}$, $-i$ et 1 .

1) a) Vérifier que : $\frac{z_{\overrightarrow{AN}}}{z_{\overrightarrow{AI}}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) En déduire la valeur de θ pour lequel le triangle AIN soit rectangle en A .

2) Soit B le point d'affixe $2i$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z.

Exercice n°3 :(5.5 pts)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on à : $U_n \geq 3$

b) Montrer que (U_n) est décroissante .

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite ℓ

2) a) Montrer que , pour tout $n \in IN$, on à : $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(\,U_n - 3\,)$

b) En déduire par récurrence que , pour tout $n \in IN$, on à : $U_n - 3 \leq (\frac{1}{3})^n$

c) Retrouver alors la limite ℓ de $(\mathrm{U_n})$.

- ***Bon Travail*** -