Prof :B.Anis
Classe : $4^{ème}$sc-exp$_2$

Devoir de contrôle n°1
Mathématiques
Durée :2h

EXERCICE N°1(2 pts)

Répondre par vrai ou faux . Aucune justification n'est demandée

1) Soit $\theta \in]\pi;2\pi[$ .L'écriture exponentielle du nombre complexe 1+$e^{i\theta}$ est : $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
2) La suite U définie sur IN^* par $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
3) Pour tout nombre complexe non nul z on a : $arg\left(\frac{z^2}{z}\right) \equiv 3\arg(z)[2\pi]$.
4) Les solutions dans ℂ de l'équation :$z^2-3z+1=0$ sont conjugués.

EXERCICE N°2(6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormée direct $(O;\vec{U};\vec{V})$.On considère les points A,B et C d'affixes respectives : **a=-1+2i ; b= -2 - i et C= - 3 + i**

1)Placer les points A , B et C dans le repère $(O;\vec{U};\vec{V})$.

2)Calculer $\frac{b}{a}$ en déduire la nature du triangle OAB.

3)On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z ≠ b, associe le point M' d'affixe z' définie par z' = $\frac{z+1-2i}{z+2+i}$.

a)Calculer l'affixe c' du point C'=f(C) .

b)Déterminer l'ensemble ζ des points M d'affixes z ≠ b tels que $|z'| = 1$

c)Justifier que ζ contient les points O et C .Tracer ζ .

EXERCICE N°3(6pts)

Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n = \frac{n}{(n-1)!}$.

(on rappelle que n !=n(n-1)(n-2)….2.1 et 0 !=1)

1)Calculer U_1 et U_2 .

2)a) Vérifier que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$ pour tout $n \in IN^*$.

b)Montrer que pour tout entier n≥ 2 on a :$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$.

c)En déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2)a)Montrer que pour tout entier n≥ 2 : $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} U_2$.

b)En déduire la limite de la suite (U_n).

3)On pose pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a)Montrer que pour tout $n \geq 2$ $on\ a : 0 < S_n \leq 1 + 8\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]$.

b)En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

EXERCICE N°4(6pts)

Soit la fonction définie sur IR^* par $\begin{cases} f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} & si\ x > 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} & si\ x < 0 \end{cases}$

1)a)Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{-2}{x} \leq f(x) \leq 0$ $et\ déduire$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b)Montrer que $\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-1}{2}$ et déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

2)a)Montrer que pour tout x $< 0, f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}$.

b)Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et déterminer f($]-\infty; 0[$)

3)Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par g(x)=tan(πf(x))

a)Montrer que g est continue sur $]-\infty; 0[$.

b)Montrer que l'équation g(x)=-1.5 admet au moins une solution dans l'intervalle]-8 ;-3[.

Bon travail