

L-S-ROGBA	Devoir de contrôle n°1 ***Mathématiques***	Classe : 4^{ème} Sc-Exp₃
A-S :2014/2015	Prof : MBAREK Kamel	Durée : 2 Heures

EXERCICE 1 : (7 Pts)

1/a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 - (1 + i)z + i = 0$.

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2/ On considère l'équation $E_\theta: z^2 - 2e^{i\theta} \cos \theta z + e^{2i\theta} = 0$; $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

a) Vérifier que 1 est une solution de E_θ .

b) Trouver l'autre solution de E_θ

3/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$

a) Déterminer l'affixe du point C tel que OMCM' soit un losange.

b) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire du losange OMCM' soit égale à 1.

EXERCICE 2 : (3 Pts)

1/ On considère le nombre complexe $z = (\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Donner la forme algébrique de z et vérifier que $1 - z = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})(1 - i)$.

b) Ecrire $1 - z$ sous forme exponentielle.

2/ Soit $U = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$.

a) Vérifier que $(1 - z).U = 1 - z^6$.

b) En déduire un argument de U.

EXERCICE 3 : (7 Pts)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 1 + x \cdot \sin(\pi x) + x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1/a) montrer que pour tout $x < 0$ on a: $1 + x + x^2 \leq f(x) \leq 1 - x + x^2$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

2/a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{-6}{(\sqrt{x^2+3})^3}$.

b) Dresser le tableau des variations de f sur $[0, +\infty[$.

3/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[0,1]$.

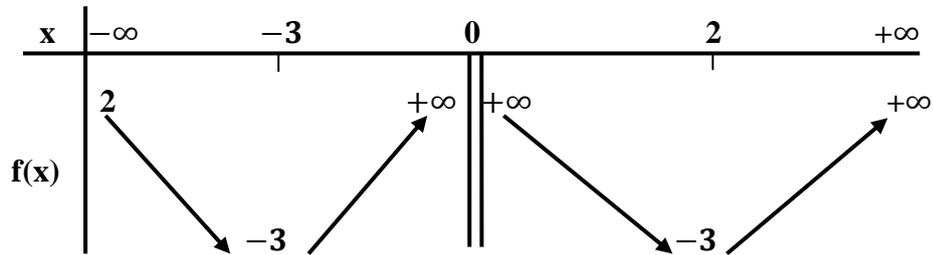


4/a) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a: $|f'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}|x - \alpha|$.

EXERCICE 4 : (3 Pts)

Le tableau ci-dessous représente les variations d'une fonction f définie et continue sur \mathbb{R}^* .



Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On suppose que la droite $\Delta: y = x + 1$ est une asymptote à (\mathcal{C}_f) au $V_{+\infty}$ et que $T: y = -2x$ est la tangente à (\mathcal{C}_f) au point $A(1, -2)$.

1/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2 - f(x)}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x) - x)$.

2/ Soit g la fonction définie par $g(x) = f(3 + f(x))$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ et $g'(1)$.