L-S-ROGBA	**Devoir de contrôle n°1** ***Mathématiques***	Classe : $4^{ème}$ Sc-Exp₁
A-S :2014/2015	Prof : MBAREK Kamel	Durée : 2 Heures

EXERCICE 1 :(8 Pts)

1/ On considère l'équation (E): $z^2-(3+\sqrt{3})z+(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-i)=0$.

a) Vérifier que : $(1+\sqrt{3}+2i)^2=2\sqrt{3}+4i(1+\sqrt{3})$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et Ω d'affixes respectives $z_A=1-i$; $z_B=2+\sqrt{3}+i$ et $z_\Omega=2$. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω et de rayon 2.

a) Vérifier que B appartient à $(\mathscr{C})$.

b) Placer les points A et Ω. Construire le point B.

3/a) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique et montrer que $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c) En déduire la forme exponentielle de z_B.

d) Déterminer alors la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$.

EXERCICE 2 :(7 Pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases}1+x\cos(\pi x)+x^2 & \text{si } x<0\\ 1-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1/ Montrer que f est continue en 0.

2/a) montrer que pour tout $x<0$ *on a*: $1+x+x^2\leq f(x)\leq 1-x+x^2$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

3/a) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{-4}{(\sqrt{x^2+4})^3}$.

b) Dresser le tableau des variations de f sur $[0,+\infty[$.

4/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans [0,1].

5/a) Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[$ on a: $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

b) En déduire que $\forall x\in[0,+\infty[$, $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

EXERCICE 3 :(5 Pts)

La courbe ($\mathscr{C}_f$) ci-dessous représente dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$une fonction f définie sur IR*.

La droite $\Delta: y = x + 1$ est une asymptote à ($\mathscr{C}_f$) au $V_{+\infty}$, la droite $\Delta': y = 2$ est une asymptote horizontale à ($\mathscr{C}_f$) au $V_{-\infty}$ et l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à ($\mathscr{C}_f$).

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{f(x)-2}$, $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{f(x)-1}{x+3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1-f(x))$.

2/ Déterminer $f'_d(2)$ et $f'(1)$.

3/ Donner le tableau des variations de f.

4/ Soit g la fonction définie par $g(x) = f\big(2 + f(x)\big)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ et $g'(1)$.