Lycées :Ksour essef & Souassi

* * *

DEVOIR DE CONTROLE N° 1

* * *

10/2016

SECTIONS : $4^{\text{éme}}$ *Sciences Expérimentales*
EPREUVE : *Mathématiques*
DUREE : 2 *heures*
PROFS : Chokri Hlaoui, Abderrahmen Azzouz & Wissem Fligène

Exercice 1 : (5 pts)

1) Montrer que $-4-4i=4\sqrt{2}.e^{i\frac{5\pi}{4}}$
2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=-2i$, $z_B=4-2i$, $z_C=4+2i$ et $z_D=1$.
   a) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$.
   b) Déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.
3) Soit M un point du plan d'affixe $z\neq-2i$ et M' un point d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{z-4-2i}{z+2i}$
   a) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'|=1$.
   b) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $(z'-1)(z+2i)$.
   c) Déduire que : $DM'.AM=4\sqrt{2}$ et $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{DM'}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{4}\,[2\pi]$.

Exercice 2 : (5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit le nombre complexe $z=i+e^{i\theta}$; $\theta\in[0,\pi]$.

1) Vérifier que $z=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$
2) Pour cette question, on prend $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.
   a) Ecrire z sous forme algébrique puis montrer que $|z|^2=2+\sqrt{3}$.
   b) Ecrire z sous forme exponentielle.
   c) En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
3) Soit les points $N\left(e^{i\theta}\right)$, $A(-i)$ et $I(1)$.
   a) Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{AN}}}{z_{\overrightarrow{AI}}}=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
   b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux.

Exercice 3 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & si\ x \in \left]-\infty, 1\right] \backslash \{0\} \\ f(x) = \sqrt{x^2+8} - (x+1) & si\ x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases}$

1) a) Vérifier que pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right] \backslash \{0\}$, on a $|f(x)| \leq |x|$.
   b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.
2) Montrer que f est continue en 1.
3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x)$.
   b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
4) a) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
   b) Vérifier que $\sin\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\right) = \dfrac{1}{2\alpha}$.

Exercice 4 : (4 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\ 2}+3}{U_n+1} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leq U_n \leq 3$
2) a) Montrer que (U_n) est une suite croissante.
   b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
3) a) Vérifier que $3 - U_{n+1} = \dfrac{U_n(3-U_n)}{U_n+1}$
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(3-U_n)$
   c) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3 - U_n \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ puis retrouver la limite de la suite (U_n).