Lycée El Amel Fouchana	Devoir de contrôle n°1		
Prof : B. Zouhaier	4 ème SC1	Novembre 2016	Durée :2 heures

Exercice n°1(4points) : les parties I, II et III sont indépendantes

I/ Démontrer les identités suivantes :

1. $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout réel θ
2. Pour tout nombre complexe Z : $Z\bar{Z} = |Z|^2$
3. $(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + isin(n\theta)$

II/Répondre par **Vrai** ou **Faux**, en justifiant la réponse

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+3^n}{2-3^n} = 1$
2. Si f et g sont deux fonctions définies sur IR telles que $f(1) = 2$ et $g(2) = 3$ alors $\lim_{x\to1} gof(x) = 3$
3. $\lim_{x\to1} \frac{x^3+2x-3}{x-1} = 3$

III/Recopier et compléter les phrases suivantes par ce qui convient

1. Toute suite convergente est …………………………
2. $Arg(Z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si …………………..

Exercice n°2(6points) :

Soit la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2} \quad pour\ tout\ n \in IN \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 1$
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
3. a)Montre que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$

   b) En déduire que pour tout entier naturel n,on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   c) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).
4. Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$

   a)Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

   b) Exprimer (V_n) et puis (U_n) en fonction de n.

   c)Retrouver la limite de (U_n)
5. Soit S_n= $V_0 + V_1 + ………+V_n$ pour tout $n \geq 0$

   Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n°3(5points) :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considéré les points A,B,E et F d'affixes respectives 1,$\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\left(\frac{5}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ et 2

On note ($\mathscr{C}$) le cercle de centre A et de rayon 1.

1. Vérifier que $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_E = 1 + z_B^2$
2. a)Montrer que B $\in$ ($\mathscr{C}$) .

   b) Montrer que le triangle ABF est équilatéral

   c)Placer les points A, B et F

3. a) Ecrire z_B sous forme exponentielle
   b) Montrer que les points A,B et E sont alignés.
   c)Calculer la distance AE puis construire le point E
4. Montrer que les triangles AEF et OAE ont même aire

<u>Exercice n°4(5points) :</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = \begin{cases} x^2cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - 1 \ \ si\ x < 0 \\ 2x - \sqrt{x^2+x+1} \ \ si\ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)

1. a) Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $-1 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 1$
   b) En déduire que f est continue en 0
   c) Calculer alors $\lim_{x\to 0} f\left(\frac{1-cosx}{x}\right)$
   d) Calculer $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x\to -\infty} f\left(\frac{x^3}{x^2+1}\right)$
2. Calculer $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans]-3;- 2[
4. a) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
   b) Montrer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $+\infty$

<u>Bon Travail</u>