Professeurs : Mr Barhoumi Béchir Mr Saadaoui Ramzi	Devoir de contrôle n° 1	
	Epreuve : MATHEMATIQUES	
	Durée : 2 h	Date : 28/10/2016
Lycée de Fériana	Section : Sciences expérimentales	

(Le sujet comporte 3 pages numérotées de « Page 1 sur 3 » à « Page 3 sur 3 »)

Exercice 1 (6 points) :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-\cos(\pi x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1} + \dfrac{\pi^2}{2}}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. a. Etudier la continuité de la fonction f en 0

1. b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

3. a. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}$$

3. b. En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

4. Montrer que l'équation « $f(x) = x + \frac{1}{x}$ » admet au moins une solution dans l'intervalle $]1,2[$

5. Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} h \circ f(x)$$

Exercice 2 (4 points) :

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $f(2) = 1$
- $g(-1) = -2$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = g(2 - x)$$

1. a. Montrer que l'équation « $f(x) = 0$ » admet une unique solution $\alpha \in]2,3[$

1. b. Montrer que l'équation « $g(x) = 0$ » admet une unique solution $\beta \in]-1,0[$

1. c. Montrer que $\alpha + \beta = 2$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 1 \\ g(x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Montrer que h est continue en 1

Exercice 3 (10 points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit I le point d'affixe 1, (ζ) le cercle de centre O et de rayon 1 et (ζ') le cercle de centre I et de rayon 1.

Soit z un nombre complexe non nul, M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z, $z_1 = 1 + iz$ et $z_2 = 1 - iz$

1. Vérifier que I est le milieu du segment $[M_1M_2]$

2. Dans cette question, on prendra $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

a. Déterminer la forme trigonométrique de z

b. Mettre z_1 et z_2 sous forme cartésienne

c. Montrer que $\overrightarrow{MM_1}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

d. Montrer que M_1 appartient à (ζ')

e. Construire les points M, M_1 et M_2 dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3. On suppose que $z \neq -i$

a. Montrer que :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - z\bar{z} + i(z + \bar{z})}{|z_2|^2}$$

b. En déduire que :

$$(O, M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont alignés}) \text{ si et seulement si } (Re(z) = 0)$$

et que :

$$\left(\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}\right) \text{ si et seulement si } (z\bar{z} = 1)$$

4.

a. Montrer que :

$$(|z| = 1) \text{ si et seulement si } (|z_1 - z_2| = 2)$$

b. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M_1 et M_2, lorsque M décrit (ζ)